KU LEUVEN

Groep Wetenschap & Technologie

Voorstudietraject fysica

Basisbegrippen van de natuurkunde

(versie 24 februari 2026)

Inhoudsopgave

1 Inleiding 1.1

1.1 Intro . . . 1.1

2 Vectorrekenen 2.1

2.1 Intro vectorrekenen . . . 2.1
2.2 Scalaire versus vectoriële grootheden . . . 2.2
2.3 Vectorcomponenten . . . 2.3
2.4 Bewerkingen met vectoren . . . 2.6
2.5 Voorbeeldoefeningen . . . 2.10
2.6 Oefeningen Vectorrekenen . . . 2.11

3 Kinematica 3.1

3.1 Intro kinematica . . . 3.1
3.2 Grootheden kinematica . . . 3.2
3.3 Eén-dimensionale kinematica . . . 3.6
3.4 Eén-dimensionale bewegingen . . . 3.10
3.5 Voorbeeldoefening . . . 3.12
3.6 Twee-dimensionale kinematica . . . 3.13
3.7 De cirkelvormige beweging . . . 3.16
3.8 Oefeningen Kinematica . . . 3.19

4 Dynamica 4.1

4.1 Intro dynamica . . . 4.1
4.2 Kracht . . . 4.2
4.3 Soorten krachten . . . 4.3
4.4 Krachtendiagramma's . . . 4.8
4.5 De wetten van Newton . . . 4.12
4.6 Centripetaalkracht . . . 4.15
4.7 Oefeningen Dynamica . . . 4.17

5 Arbeid en energie 5.1

5.1 Intro arbeid en energie . . . 5.1
5.2 Arbeid en vermogen . . . 5.2
5.3 Arbeid en kinetische energie . . . 5.5
5.4 Potentiële energie . . . 5.6
5.5 Behoudswetten . . . 5.7
5.6 Oefeningen Arbeid en Energie . . . 5.8

6 Trillingen 6.1
6.1 Intro trillingen . . . 6.1
6.2 De harmonische trilling . . . 6.2
6.3 Snelheid, versnelling, kracht en eigenfrequentie van een harmonische trilling . . . 6.7
6.4 Voorbeelden . . . 6.9
6.5 Energie van een systeem dat een harmonische trilling uitvoert . . . 6.11
6.6 Soorten trillingen . . . 6.14
6.7 Oefeningen Trillingen . . . 6.16

7 Golven 7.1
7.1 Intro golven . . . 7.1
7.2 Ontstaan van een golf . . . 7.2
7.3 Begrippen . . . 7.3
7.4 De golfvergelijking(en) . . . 7.6
7.5 Energie en intensiteit van een golf . . . 7.9
7.6 Oefeningen Golven . . . 7.11

8 Hydrostatica 8.1
8.1 Intro hydrostatica . . . 8.1
8.2 Hydrostatische druk . . . 8.2
8.3 Wet van Archimedes . . . 8.4
8.4 Oefeningen Hydrostatica . . . 8.5

9 Elektrostatica 9.1
9.1 Intro elektrostatica . . . 9.1
9.2 Elektrische krachtwerking . . . 9.2
9.3 Elektrische velden . . . 9.5
9.4 Elektrische veldlijnen . . . 9.8
9.5 Elektrische potentiële energie en potentiaal . . . 9.9
9.6 Potentiaal . . . 9.12
9.7 Oefeningen Elektrostatica . . . 9.15

10 Elektrodynamica 10.1
10.1 Intro elektrodynamica . . . 10.1
10.2 Elektrische spanning . . . 10.2
10.3 Elektrische stroom . . . 10.7
10.4 Elektrische weerstand . . . 10.9
10.5 Warmte en vermogen in een weerstand . . . 10.13
10.6 Oefeningen Elektrodynamica . . . 10.15

11 Elektrische schakelingen 11.1
11.1 Intro elektrische schakelingen . . . 11.1
11.2 Begrippen . . . 11.2
11.3 De serieschakeling . . . 11.4
11.4 De parallelschakeling . . . 11.6
11.5 Oefeningen Schakelingen . . . 11.8

12 Permanente magneten 12.1
12.1 Intro permanente magneten . . . 12.1
12.2 Eigenschappen . . . 12.2
12.3 Het magnetische veld . . . 12.3
12.4 Het magnetische veld van de aarde . . . 12.5
12.5 Oefeningen Magneten . . . 12.6

13 Het magnetische veld van een elektrische stroom 13.1
13.1 Intro magnetisch veld van een elektrische stroom . . . 13.1
13.2 Het magnetische veld van een rechte stroomvoerende geleider . . . 13.2
13.3 Het magnetische veld van één stroomvoerende winding . . . 13.4
13.4 Het magnetische veld van een stroomvoerende spoel . . . 13.5
13.5 Verklaring van magnetisme . . . 13.7
13.6 Oefeningen Magnetisch veld . . . 13.8

14 De elektromagnetische krachtwerking 14.1
14.1 Intro elektromagnetische kracht . . . 14.1
14.2 De elektromagnetische krachtwerking . . . 14.2
14.3 Oefeningen Magnetische kracht . . . 14.5

15 Elektromagnetische inductie 15.1
15.1 Intro elektromagnetische inductie . . . 15.1
15.2 Magnetische flux . . . 15.2
15.3 Elektromagnetische inductie . . . 15.4
15.4 De transformator . . . 15.7
15.5 Oefeningen Magnetische flux . . . 15.9

16 Kernfysica 16.1
16.1 Intro kernfysica . . . 16.1
16.2 Begrippen . . . 16.2
16.3 Bindingsenergie . . . 16.5
16.4 Natuurlijke radioactiviteit . . . 16.8
16.5 De vervalwet . . . 16.12

CC BY-NC-SA 4.0

16.6 Activiteit 16.15
16.7 Dosis en dosisequivalent 16.17
16.8 Oefeningen Kernfysica 16.18

17 Thermodynamica 17.1
17.1 Intro thermodynamica 17.1
17.2 Temperatuur en warmte 17.2
17.3 Gaswetten 17.3
17.4 Warmte 17.6
17.5 Oefeningen Thermodynamica 17.9

18 Herhalingsoefeningen 18.1
18.1 Herhalingsoefeningen: vectoren 18.1
18.2 Herhalingsoefeningen: de 1D-beweging 18.10
18.3 Herhalingsoefeningen: de 2D-beweging 18.17
18.4 Herhalingsoefeningen: dynamica 18.23
18.5 Herhalingsoefeningen: arbeid en energie 18.34
18.6 Herhalingsoefeningen: trillingen 18.41
18.7 Herhalingsoefeningen: golven 18.46
18.8 Herhalingsoefeningen: Usolvit 18.49

19 Bibliografie 19.1
19.1 Bibliografie 19.1

1.1 Intro

Deze online cursus behandelt de leerstof fysica waarmee je best vertrouwd bent bij het begin van je studies

- biochemie en biotechnologie
- biologie
- chemie
- geografie, geologie
- farmaceutische wetenschappen
- biomedische wetenschappen
- logopedische en audiologische wetenschappen
- lichamelijke opvoeding en bewegingswetenschappen
- revalidatiewetenschappen en kinesitherapie
- sommige schakelprogramma's

Voor de meeste toekomstige studenten is dit een opfrissing van leerstof die ze al hebben gezien. Toch is geprobeerd om bij de invoering van begrippen en concepten ook voldoende rekening te houden met studenten waarvoor de leerstof volledig nieuw is.

Deze cursusnota's zijn beschikbaar in meerdere vormen:

(a) als PDF, die je ofwel op je computer kan lezen, ofwel kan printen.

Als je de PDF op de computer leest, werken allerlei interne links naar oefeningen, definities en eigenschappen. In een geprinte versie verdwijnt een deel van die functionaliteit.

Via de KU Leuven website `https://set.kuleuven.be/zomercursussen` vind je de online versie die extra functionaliteiten biedt.

(b) als online applicatie, met volgende extra functionaliteiten:

- interactieve antwoordmogelijkheden, met feedback en/of hints
- directe links naar extra oefeningen
- een aantal filmpjes

Je kan zowel elk afzonderlijk onderdeel als de volledig cursus als PDF bestand downloaden. Er zijn telkens twee versies, een 'handout' versie met de opgaven van de oefeningen, maar zonder de antwoorden, en een 'standaard' versie die van de meeste oefeningen ook antwoorden en zelfs uitgewerkte oplossingen bevat.

De inhoud van deze recent aangemaakte online cursus is gebaseerd op leerstof fysica van het secundair onderwijs (2de en 3de graad 2u fysica) en wordt gebruikt als cursusmateriaal tijdens verschillende zomercursussen basiswetenschappen die jaarlijks georganiseerd worden. Het online leerplatform is bovendien ook uitermate geschikt voor zelfstudie.

Aangezien deze online cursus nog voortdurend wordt aangevuld en bijgewerkt, is alle feedback steeds welkom op zomercursus@set.kuleuven.be !

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Intro vectorrekenen

Rekenen met vectoren is een basisvaardigheid voor het vak fysica. In dit hoofdstuk bespreken we het verschil tussen een scalaire en een vectoriële grootheid. We vatten de belangrijkste eigenschappen en rekenregels voor vectoren samen: vectoren optellen, vectoren vermenigvuldigen met een reëel getal, en de componenten van een vector bepalen ten opzichte van een assenstelsel.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Scalaire versus vectoriële grootheden

Heel wat grootheden in de fysica kunnen voorgesteld worden door een getalwaarde met een eenheid. Denk bijvoorbeeld aan het volume van een ton, de luchttemperatuur, het tijdstip van een gebeurtenis. Deze grootheden hebben een scalair karakter.

Maar vaak zijn enkel een getal en een eenheid niet voldoende om een grootheid precies te bepalen. Stel je wandelt in een dorp en je bent op zoek naar de supermarkt. Een voorbijganger laat je weten dat het in vogelvlucht nog 500 m wandelen is. Met deze info kan de supermarkt eender waar liggen op een cirkel met straal 500 m. Om de exacte positie van de supermarkt te weten moet ook de richting en de zin, bijvoorbeeld noordoosten, gegeven zijn. Pas als zowel de afstand als de richting gekend zijn, ligt de positie vast. Deze grootheid heeft een vectorieel karakter.

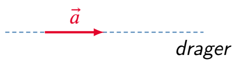
Eigenschap 2.2.1. Fysische grootheden zijn ofwel ‘scalair’ ofwel ‘vectorieel’:

(a) **Scalaire grootheden** zijn volledig bepaald door een rëeel getal en een eenheid.
Voorbeelden: een massa m, lengte ℓ, temperatuur T, ...

(b) **Vectoriële grootheden** zijn volledig bepaald door een aangrijpingspunt, grootte (maatgetal met eenheid), richting en zin.
Voorbeelden: positie $\vec{r}$, snelheid $\vec{v}$, versnelling $\vec{a}$, kracht $\vec{F}$, elektrisch veld $\vec{E}$, ...

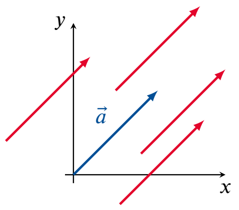
Een vectoriële grootheid wordt genoteerd door een pijltje boven de letter: $\vec{a}$.
De grootte van deze vector is een reëel getal (scalar) en noteren we als a (dus als het vectorsymbool zonder pijltje) of $\|\vec{a}\|$.

Een vector wordt grafisch voorgesteld door een pijl, waarvan de lengte evenredig is met zijn grootte. De rechte verbonden met de vector wordt de **drager** genoemd. De richting van deze drager komt overeen met de richting van de vectoriële grootheid (vb. horizontaal, verticaal, ...). De zin van de vectorpijl is de zin waarin de vectoriële grootheid wijst (vb. links, rechts, ...)



Figuur 1 – De drager van een vector $\vec{a}$.

In de fysica maakt men een onderscheid tussen vrije en gebonden vectoren. Als je een vrije vector verschuift in het vlak of in de 3-dimensionele ruimte, blijft dit dezelfde vector:



Figuur 2 – Vrije vectoren $\vec{a}$.

Op een afbeelding stellen verschillende pijlen met dezelfde lengte, richting en zin *dezelfde vrije vector* voor maar *verschillende gebonden vectoren*:

(a) **Vrije vectoren** zijn gelijk als ze dezelfde lengte, richting en zin hebben.

(b) **Gebonden vectoren** zijn gelijk als ze bovendien hetzelfde aangrijpingspunt hebben.

Afhankelijk van het probleem kunnen aangrijpingspunten soms wel belangrijk zijn, en soms niet.

CC BY-NC-SA 4.0

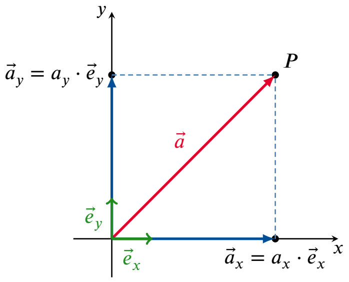
2.3 Vectorcomponenten

Wanneer we vectoren in een vlak of in de ruimte willen beschrijven, hebben we een assenstelsel nodig. Deze assen kiezen we orthogonaal (loodrecht) met eenzelfde eenheid op iedere as: ze vormen een zogenaamd **cartesiaans assenstelsel**. Conventioneel worden de assen voor een vlak benoemd met x en y.

Op elke as definiëren we een vector met lengte 1, die we de **eenheidsvector** noemen. We stellen deze voor door $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$. De indices x en y duiden de richting aan, namelijk volgens de horizonale x-as en de verticale en y-as. Andere notaties van eenheidsvectoren zijn $\hat{x}$, $\hat{y}$ of $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$.

De eenheidsvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ vormen een basis voor de vectoren in het x, y-vlak. Dit betekent dat je elke vector $\vec{a}$ in het x, y-vlak op éénduidige wijze kan ontbinden in **vectorcomponenten** volgens $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$$



Figuur 3 – Vector $\vec{a}$ in een x, y-assenstelsel.

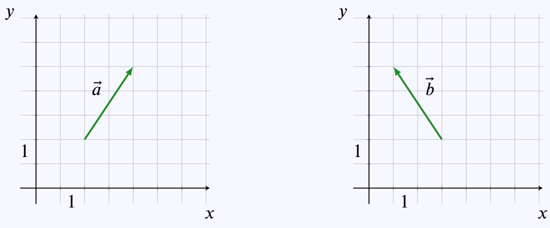
(a) $\vec{a}_x = a_x \cdot \vec{e}_x$ is dan de vectoriële component van $\vec{a}$ volgens $\vec{e}_x$.

(b) a_x noemen we de **(scalaire of algebraïsche) component** volgens de x-as.

(c) Analoog is $\vec{a}_y = a_y \cdot \vec{e}_y$ de vectoriële component van $\vec{a}$ volgens $\vec{e}_y$.

(d) a_y noemen we de scalaire of algebraïsche component volgens de y-as.

Voorbeeld 2.3.1.



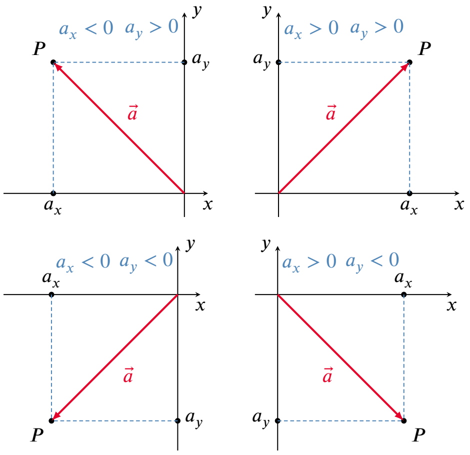
Links is $a_x = 2$ en $a_y = 3$. Je kan dus schrijven dat $\vec{a} = 2 \cdot \vec{e}_x + 3 \cdot \vec{e}_y$ of ook $\vec{a} = (2, 3)$.

Rechts is $b_x = -2$ en $b_y = 3$. Je kan dus schrijven dat $\vec{b} = -2 \cdot \vec{e}_x + 3 \cdot \vec{e}_y$ of ook $\vec{b} = (-2, 3)$.

De scalaire componenten zijn reële getallen die zowel positief als negatief kunnen zijn, afhankelijk van de richting en zin van de vector.

CC BY-NC-SA 4.0

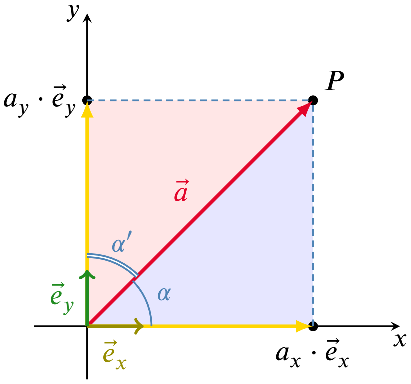
2.3 Vectorcomponenten



Figuur 4 – Voorbeelden van vector $\vec{a}$ in verschillende kwadranten.

In vele situaties is zowel de lengte van de vector als de hoek tussen de vector en één van de assen gekend. In figuur 5 bijvoorbeeld is de hoek α aangeduid tussen de vector $\vec{a}$ en de x-as. In dit geval kunnen we schrijven dat

$$a_x = a \cdot \cos\alpha \qquad \text{en} \qquad a_y = a \cdot \sin\alpha.$$



$$\begin{cases} a_x = a\cos\alpha = a\sin\alpha' \\ a_y = a\sin\alpha = a\cos\alpha' \end{cases}$$

Figuur 5 – Vector $\vec{a}$ in een x, y-assenstelsel.

Bewijs : Door de vector $\vec{a}$ te splitsen in zijn componenten, kan er op de tekening in figuur 5 een (blauwe) rechthoekige driehoek gevonden worden waarin de hoek alfa voorkomt. De schuine zijde van deze driehoek heeft lengte a, de rechthoekszijden hebben respectievelijke lengte a_x en a_y. Door de goniometrische formules voor sinus en cosinus te gebruiken, bekomt men:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} \quad \text{en dus is} \quad a_x = a\cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{a_y}{a} \quad \text{en dus is} \quad a_y = a\sin\alpha$$

Indien je de hoek α' tussen de vector $\vec{a}$ en de y-as zou gebruiken bekom je uiteraard dezelfde waarden voor de scalaire componenten, maar de gebruikte formules zijn verschillend:

$$a_x = a \cdot \sin\alpha' \qquad \text{en} \qquad a_y = a \cdot \cos\alpha'.$$

Op analoge wijze kan er nu gekeken worden naar de rode rechthoekige driehoek in bovenstaande figuur.

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Vectorcomponenten

Hierin geldt:

$$\cos\alpha' = \frac{a_y}{a} \quad \text{en dus is} \quad a_y = a\cos\alpha'$$
$$\sin\alpha' = \frac{a_x}{a} \quad \text{en dus is} \quad a_x = a\sin\alpha'$$

Merk op dat de hoek die de vector maakt met de x- of de y-as bepaalt of de scalaire componenten a_x en a_y positief of negatief zijn. Vertrekt de vector in de oorsprong van het assenstelsel dan zullen afhankelijk van het kwadrant waarin de vector $\vec{a}$ ligt de scalaire componenten positief of negatief zijn (zie figuur 4).

Omgekeerd : indien de scalaire componenten van vector $\vec{a}$ gekend zijn, kan men als volgt de hoek α die de vector met de horizontale richting maakt, berekenen:

$$\alpha = \text{Bgtan}\frac{|a_y|}{|a_x|}.$$

2.3.1 Lengte of norm

De lengte of norm van de vector $\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$ (zie figuur 5) kan berekend worden via

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Dit is een rechtstreeks gevolg van de stelling van Pythagoras die geldt in een rechthoekige driehoek.

Eigenschap 2.3.1. De vector $\vec{a}$ is volledig bepaald als zijn scalaire componenten volgens de assen gekend zijn. We noteren: $\vec{a} = (a_x, a_y)$.

Hieruit volgt dat $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$.

De vector $\vec{a}$ is dus de som van zijn vectoriële componenten.

De lengte of norm van de vector is gelijk aan $a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Opmerking 2.3.1. Wil je een vector in de driedimensionale ruimte beschrijven, dan heb je drie assen nodig. Orthogonaal op de x- en y-as wordt de z-as ingevoerd. Een vector $\vec{a}$ kan dan ontbonden worden in drie vectorcomponenten:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z.$$

Dan is

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

en

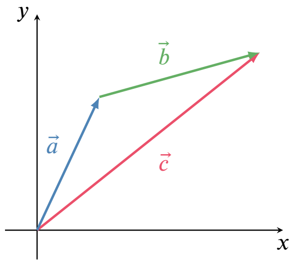
$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Bewerkingen met vectoren

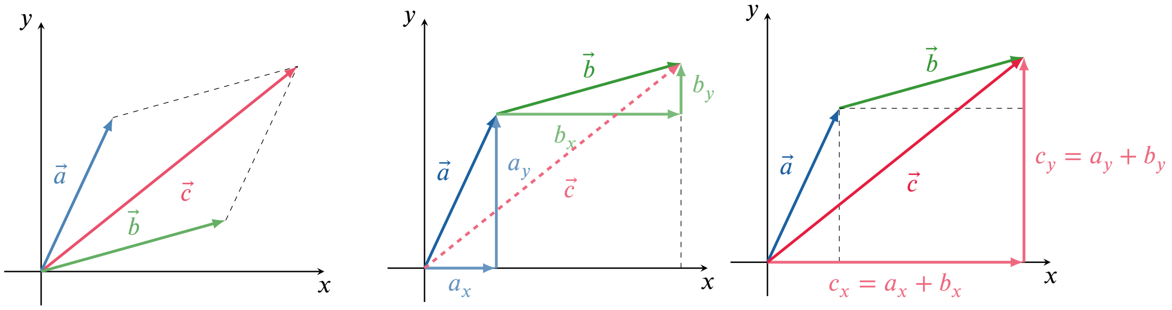
2.4.1 Som van twee vectoren

De som van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ bekomt men door $\vec{b}$ te verschuiven zodat het beginpunt samenvalt met het eindpunt van $\vec{a}$. De vector die men bekomt door dan het beginpunt van $\vec{a}$ te verbinden met het eindpunt van $\vec{b}$ is de gezochte somvector $\vec{a}+\vec{b}$. Deze grafische constructie noemt men de **kop-staart-methode.**



Figuur 6 – De vector $\vec{c}$ is de som van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, bekomen met de kop-staart-methode

Een andere grafische methode om de somvector te bekomen is de zogenaamde **parallellogrammethode**. In dit geval verschuiven we geen van beide vectoren, en laten we dus de beginpunten van beide vectoren in de oorsprong liggen. Vervolgens maken we een parallellogram door de twee vectoren als zijden te gebruiken: Aangezien overstaande zijden in een parallellogram even lang en evenwijdig zijn, is er maar 1 mogelijkheid. We vinden de somvector dan als de vector met beginpunt in de oorsprong en eindpunt in de overstaande hoek van het parallellogram.



Figuur 7 – De vector $\vec{c}$ is de som van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, bekomen met de parallellogrammethode

Indien de scalaire componenten van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gegeven zijn, kunnen we de vectorsom $\vec{c}$ berekenen:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a}+\vec{b}\\ &= \left(a_x\cdot\vec{e}_x + a_y\cdot\vec{e}_y\right) + \left(b_x\cdot\vec{e}_x + b_y\cdot\vec{e}_y\right)\\ &= \left(a_x+b_x\right)\cdot\vec{e}_x + \left(a_y+b_y\right)\cdot\vec{e}_y\end{aligned}$$

Anderzijds geldt natuurlijk dat $\vec{c} = c_x\vec{e}_x + c_y\vec{e}_y$. Hieruit volgt dat

$$\left\{\begin{array}{l} c_x = a_x + b_x \\ c_y = a_y + b_y \end{array}\right. .$$

2.4.2 Verschil van twee vectoren

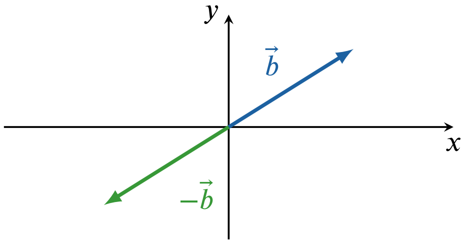
We kunnen het verschil van 2 vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, genoteerd als $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, zien als de som van de vector $\vec{a}$ en de vector $-\vec{b}$. We noemen $-\vec{b}$ hier de **tegengestelde vector** van $\vec{b}$. De tegengestelde vector heeft dan

CC BY-NC-SA 4.0

ook de tegengestelde componenten van de originele vector:

$$-\vec{b} = -\left(b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y\right) = -b_x\vec{e}_x + (-b_y)\vec{e}_y\,.$$

Deze tegengestelde vector vinden we ook eenvoudig grafisch door de originele vector te spiegelen rond de oorsprong (let wel dat we hier veronderstellen dat de vector een beginpunt in de oorsprong heeft, anders moet de vector eerst nog verschoven worden tot dit wel het geval is).



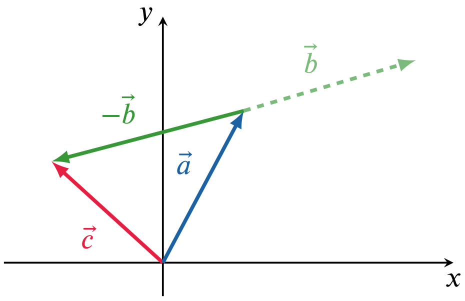
Figuur 8 – Een vector en zijn tegengestelde vector.

We kunnen bijgevolg de grafische methoden van de vorige sectie overnemen, en ook met componenten vinden we eenvoudig het resultaat:

$$\begin{aligned}
\vec{c} &= \vec{a} - \vec{b} \\
&= \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) \\
&= \left(a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y\right) + \left(-b_x \cdot \vec{e}_x + \left(-b_y\right) \cdot \vec{e}_y\right) \\
&= \left(a_x - b_x\right) \cdot \vec{e}_x + \left(a_y - b_y\right) \cdot \vec{e}_y
\end{aligned}$$

Anderzijds geldt natuurlijk dat $\vec{c} = c_x\vec{e}_x + c_y\vec{e}_y$. Hieruit volgt dat

$$\begin{cases} c_x = a_x - b_x \\ c_y = a_y - b_y \end{cases}.$$



Figuur 9 – De vector $\vec{c}$ is het verschil van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Men noteert: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

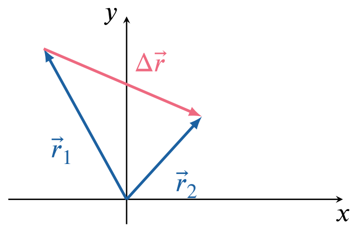
2.4.2.1 Toepassing: Verplaatsingsvector

In de fysica wordt het verschil van twee vectoren bijvoorbeeld gebruikt in de zogenaamde **verplaatsingsvector**. We bekijken twee punten in de ruimte, die we noteren met de vectoren $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ (bijvoorbeeld het vertrekpunt van een auto, en het punt van aankomst). Dan is de verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}$ gedefinieerd als

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1\,.$$

CC BY-NC-SA 4.0

Deze vector wijst van $\vec{r}_1$ naar $\vec{r}_2$, en geeft dus de verplaatsing weer.



Figuur 10 – De verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}$.

De verplaatsingsvector komt bijvoorbeeld voor in de formule voor de gemiddelde snelheid $\vec{v}_{\text{gem}}$, waar $\Delta t = t_2 - t_1$ het tijdsinterval is:

$$\vec{v}_{\text{gem}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

2.4.3 Vermenigvuldiging van een vector met een scalar

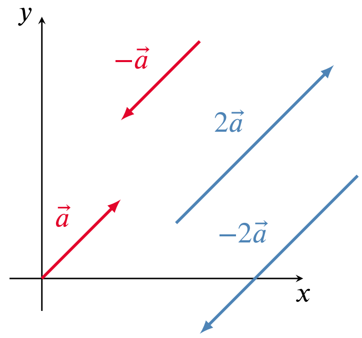
Wanneer we de vector $\vec{a}$ vermenigvuldigen met een scalar m verkrijgen we de vector $m \cdot \vec{a}$:

(a) $m \cdot \vec{a}$ heeft dezelfde richting als de vector $\vec{a}$.

(b) De lengte van de vector $m \cdot \vec{a}$ is $|m|$ keer de lengte van de vector $\vec{a}$.

(c) Indien $m > 0$ heeft $m \cdot \vec{a}$ dezelfde zin als de vector $\vec{a}$

(d) Indien $m < 0$ heeft die vector de tegengestelde zin van de vector $\vec{a}$.



Figuur 11 – Vermenigvuldiging van een vector met een scalar.

Als de scalaire componenten van de vector $\vec{a}$ gekend zijn, dan kunnen die van de vector $m \cdot \vec{a}$ eenvoudig berekend worden:

$$\begin{aligned} m \cdot \vec{a} &= m \cdot \left(a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y\right) \\ &= m \cdot a_x \cdot \vec{e}_x + m \cdot a_y \cdot \vec{e}_y \\ &= \left(m \cdot a_x, m \cdot a_y\right) \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

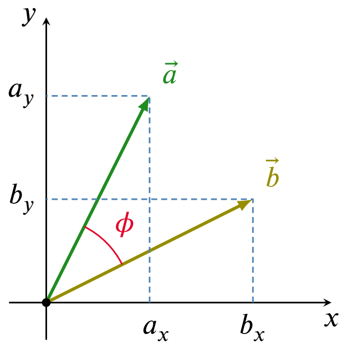
2.4 Bewerkingen met vectoren

2.4.4 Scalair product van twee vectoren

Het scalair product (dotproduct, inwendig product) van twee vectoren wordt gedefinieerd als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \phi.$$

Hierin is ϕ de kleinste hoek tussen de twee vectoren, wanneer men ze in eenzelfde punt laat aangrijpen..



Het resultaat van een scalair product van twee vectoren is een reëel getal (scalar). We noteren het scalair product met een puntje tussen de twee vectoren (belangrijk !).

Aangezien de groottes a en b van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ positief gedefinieerd zijn, bepaalt $\cos\phi$ het teken van het resultaat. Maken de twee vectoren een scherpe hoek, dan is hun scalair product positief. Maken ze een stompe hoek, dan is hun scalair product negatief. Staan ze loodrecht op elkaar, dan wordt $\cos\phi$ nul, en is het resultaat dus nul.

Indien je in plaats van de groottes van de twee vectoren en hun onderlinge hoek, de **componenten** van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ ten opzichte van een gekozen assenstel kent, dan kan je gebruik maken van volgende eigenschap:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

met $\vec{a} = \left(a_x, a_y\right)$ en $\vec{b} = \left(b_x, b_y\right)$.

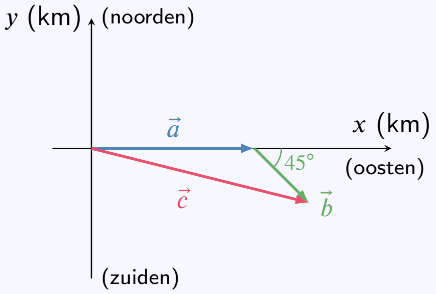
Merk tenslotte op dat het **delen van twee vectoren** niet gedefinieerd is. Ook het **delen van een scalar door een vector** is niet gedefinieerd.

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Voorbeeldoefeningen

Voorbeeld 2.5.1. Iemand loopt 5,0 km naar het oosten en daarna 3,0 km naar het zuidoosten. Bepaal de componenten van de vector die de eindpositie van de persoon aangeeft ten opzichte van zijn vertrekpunt.

Uitwerking: We maken eerst een grafische voorstelling van dit probleem. De eerste verplaatsing noteren we met vector $\vec{a}$, de tweede verplaatsing met vector $\vec{b}$. De eindpositie geven we aan met vector $\vec{c}$. We kiezen een assenstelsel en duiden de vectoren hierop aan.



We zoeken nu de componenten van vector $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$:

$$\begin{cases} c_x = a_x + b_x \\ c_y = a_y + b_y \end{cases} .$$

Uit de gegevens leiden we voor het gekozen assenstelsel af dat

$$\begin{cases} a_x = 5,0 \\ a_y = 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} b_x = 3,0 \cos(45°) = 2,1 \\ b_y = -3,0 \cdot \sin(45°) = -2,1 \end{cases} .$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{cases} c_x = 5,0 + 2,1 = 7,1 \\ c_y = 0 - 2,1 = -2,1 \end{cases} .$$

Om de notatie te vereenvoudigen hebben we geen eenheden geschreven in bovenstaande berekening, maar dat betekent niet dat deze scalaire componenten geen eenheid hebben. Strikt genomen is $c_x = 7,1$ km en $c_y = -2,1$ km.

CC BY-NC-SA 4.0

2.6 Oefeningen Vectorrekenen

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

A) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

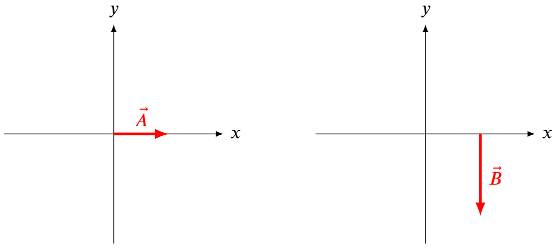
B) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

C) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.A Instapoefeningen

Oefening 2.6.1. Stel dat A en B de lengtes zijn van de respectieve vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$. Wat zijn dan de (scalaire) x- en y-componenten van onderstaande vectoren?



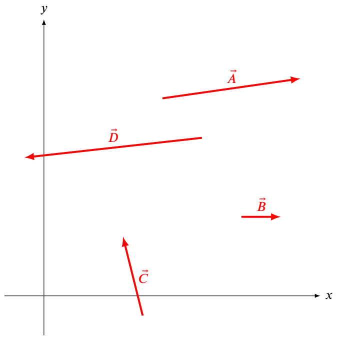
Uitwerking: Voor $\vec{A}$ geldt:

$$A_x = A\cos(0^\circ) = A$$
$$A_y = A\sin(0^\circ) = 0$$

Voor $\vec{B}$ geldt:

$$B_x = B\cos(-90^\circ) = 0$$
$$B_y = B\sin(-90^\circ) = -B$$

Oefening 2.6.2. Rangschik onderstaande vectoren volgens grootte, x-component en y-component:



Uitwerking: De vectoren kunnen als volgt gerangschikt worden volgens grootte (van klein naar groot)

$$B < C < A < D$$

De vectoren kunnen als volgt gerangschikt worden volgens grootte van de x-component (van klein naar groot)

$$D_x < C_x < B_x < A_x$$

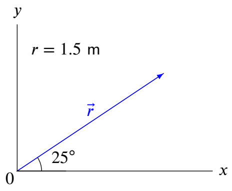
De vectoren kunnen als volgt gerangschikt worden volgens grootte van de y-component (van klein naar groot)

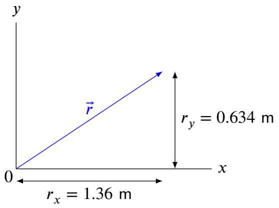
$$D_y < B_y < A_y < C_y$$

Oefening 2.6.3. Verifieer of je de gegevens uit de rechtse tekening kan afleiden uit de linkse en omgekeerd.

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.A Instapoefeningen





Uitwerking: Startend vanaf de linkse tekening kunnen de componenten van de vector bepaald worden met behulp van de volgende projecties:

$$r_x = r \cdot \cos(\theta) = (1.5\text{ m})\cos(25°) = 1.36\text{ m}$$

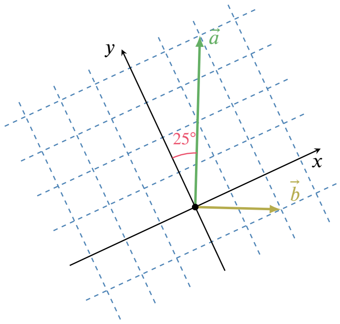
$$r_y = r \cdot \sin(\theta) = (1.5\text{ m})\sin(25°) = 0.634\text{ m}$$

Omgekeerd kunnen de gegevens uit de linker tekening afgeleid worden van de informatie in de rechtse figuur:

$$r = \|\vec{r}\| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{(1.36\text{ m})^2 + (0.634\text{ m})^2} = 1.5\text{ m}$$

$$\theta = \text{Bgtan}\left(\frac{r_y}{r_x}\right) = \text{Bgtan}\left(\frac{0.634\text{ m}}{1.36\text{ m}}\right) = 25°$$

Oefening 2.6.4. Bepaal de componenten van de vector $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ten opzichte van het assenstelsel op de figuur.



$$\vec{c} = (\ 6,\ 7\ )$$

Uitwerking: Volgens het gegeven assenstelsel hebben de vectoren de volgende componenten: $\vec{a} = (2, 4)$ en $\vec{b} = (2, -1)$. Bijgevolg vinden we dat

$$\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b} = 2(2, 4) + (2, -1) = (2 \cdot 2 + 2, 2 \cdot 4 - 1) = (6, 7)\,.$$

Oefening 2.6.5. Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$ en $\vec{b} = 4\vec{e}_x - 3\vec{e}_y$. Bereken de grootte van beide vectoren. $a = \sqrt{13}$, $b = 5$

Uitwerking: De lengtes kunnen als volgt bepaald worden:

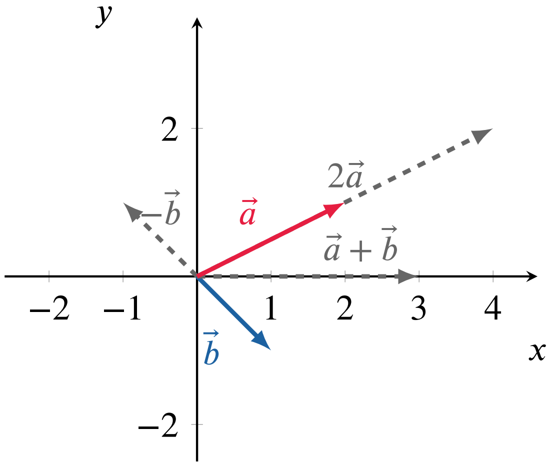
$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$
$$b = \left\|\vec{b}\right\| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.A Instapoefeningen

Oefening 2.6.6. Duid op een tekening de vectoren $\vec{a} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y$ en $\vec{b} = \vec{e}_x - \vec{e}_y$ aan. Duid ook de vectoren $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a}$ en $-\vec{b}$ aan.

Uitwerking: De volgende figuur toont de getekende vectoren:



De componenten van de samengestelde vectoren zijn de volgende:

$$\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_x - \vec{e}_y = 3\vec{e}_x + 0\vec{e}_y\,,$$
$$2\vec{a} = 2 \cdot 2\vec{e}_x + 2 \cdot 1\vec{e}_y = 4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y\,,$$
$$-\vec{b} = -\left(\vec{e}_x - \vec{e}_y\right) = -\vec{e}_x + \vec{e}_y\,.$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.B Standaardoefeningen

Oefening 2.6.7. Als alle vectorcomponenten van een vector verdubbelen, wat gebeurt er dan met de richting (hoek die de vector maakt met de x-as) en de lengte van deze vector?

1. **Meerkeuze:**

(a) de hoek verdubbelt

(b) de hoek wordt groter, maar niet zo groot als het dubbele

(c) de hoek verandert niet ✓

(d) de hoek wordt gereduceerd tot de helft

(e) de hoek wordt kleiner, maar niet zo veel als de helft

2. **Meerkeuze:**

(a) de lengte verdubbelt ✓

(b) de lengte wordt groter, maar niet zo groot als het dubbele

(c) de lengte verandert niet

(d) de lengte wordt gereduceerd tot de helft

(e) de lengte wordt kleiner, maar niet zo veel als de helft

Oefening 2.6.8. Een vector heeft x- en y-componenten die even groot zijn in absolute waarde. Welke van de onderstaande hoeken die de vector met de x-as maakt zijn dan mogelijk?

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) $30°$

(b) $45°$ ✓

(c) $60°$

(d) $120°$

(e) $135°$ ✓

Uitwerking: Voor de hoek geldt:

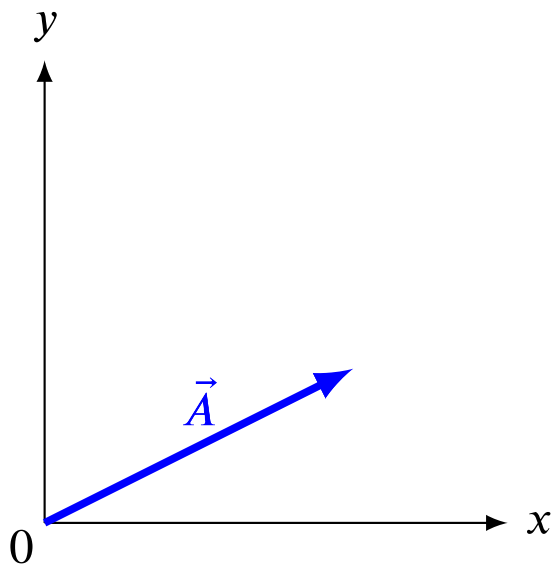
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \pm 1$$

aangezien x en y dezelfde grootte hebben en hetzelfde of het tegenovergestelde teken hebben.

Oefening 2.6.9. Een vector $\vec{A}$ heeft componenten $A_x > 0$ en $A_y > 0$, met $A_x = 2A_y$. Welke hoek maakt de vector met de x-as? $\theta = 26.6°$

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.B Standaardoefeningen

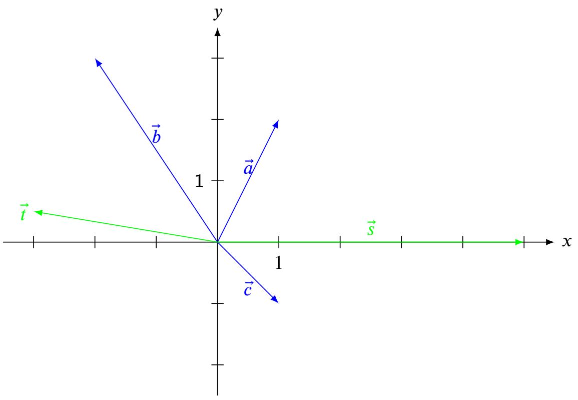


Uitwerking:

De hoek kan als volgt bepaald worden:

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} = \frac{A_y}{2A_y} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 26.6°$$

Oefening 2.6.10. Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y$, $\vec{b} = -2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$, en $\vec{c} = \vec{e}_x - \vec{e}_y$. Teken deze vectoren. Bereken en construeer de vectoren $\vec{s} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ en $\vec{t} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - 2\vec{c}\right)$.



Uitwerking:

De vectoren $\vec{s}$ en $\vec{t}$ kunnen als volgt bepaald worden:

$$\begin{aligned}\vec{s} &= (2+2+1)\vec{e}_x + (4-3-1)\vec{e}_y\\ &= 5\vec{e}_x + 0\vec{e}_y\\ &= 5\vec{e}_x\\ \vec{t} &= (-1-1-1)\vec{e}_x + (-2+\frac{3}{2}+1)\vec{e}_y\\ &= -3\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

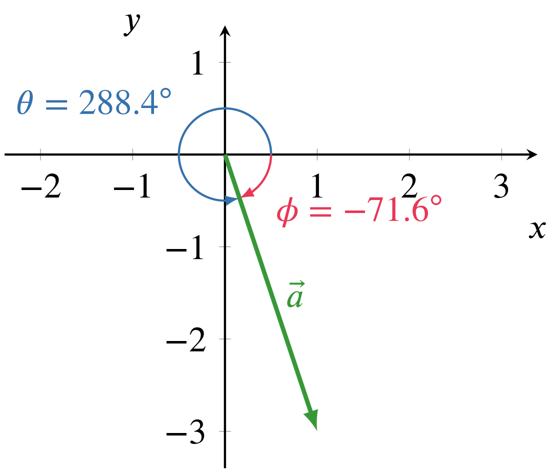
2.6.B Standaardoefeningen

Oefening 2.6.11. Wat is de grootte van de vector $\vec{c} = \vec{e}_x - 3\vec{e}_y$ en welke hoek maakt deze vector met de x-as?

Uitwerking: Voor de grootte van de vector vinden we dat $c = \|\vec{c}\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$. De hoek die de vector maakt met de x-as vinden we met de formule $\tan\phi = \frac{a_y}{a_x}$. Dan vinden we met het rekenmachine dat

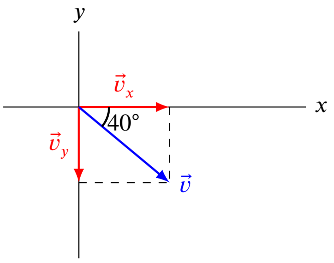
$$\phi = Bgtan\frac{-3}{1} \approx -71,6^\circ\,.$$

Willen we echter de positieve hoek, i.e. tegen de wijzers in vertrekkende van de positieve x-as, dan moeten we hier 360° bij optellen. Zo vinden we dat $\theta = 288,4^\circ$.



Oefening 2.6.12. Een vector $\vec{v}$ maakt een hoek van 40° met de positieve x-as en heeft een y-component van -10 m/s. Wat is de waarde van de x-component?

$$v_x = 12\ m/s$$



Uitwerking:

We weten dat $v_y = -v\sin\theta$ en dat $v_x = v\cos\theta$. Let op dat het minteken in de eerste vergelijking er is door het feit dat θ hier de hoek tussen de vector en de x-as is, vertrekkende *in wijzerzin* van de x-as: Normaal is dit in tegenwijzerzin. Een andere manier om dit in te zien, is te merken dat we dit minteken nodig hebben om een negatieve y-component uit te komen, aangezien v (de grootte van de vector) en $\sin 40^\circ \approx 0.64$ beiden positief zijn. Met de gegevens vinden we dan dat

$$v = -\frac{v_y}{\sin 40^\circ}\,,$$

en bijgevolg vinden we dat

$$v_x = v\cos 40^\circ = -v_y\cot 40^\circ\,.$$

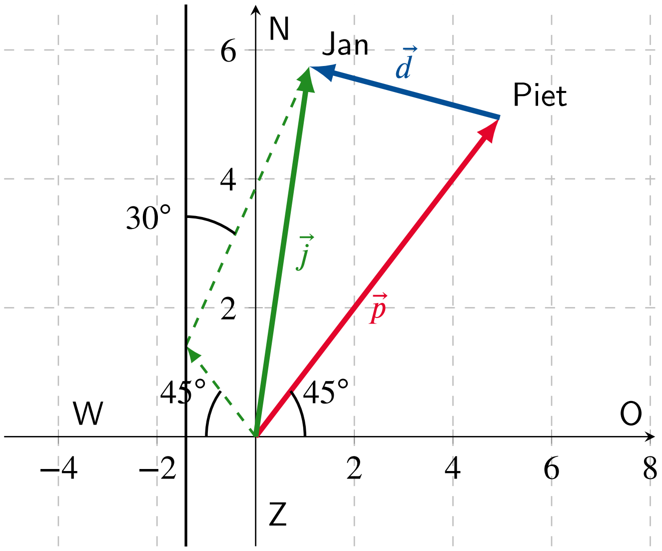
Dit geeft dan dat $v_x = 12$ m/s.

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.B Standaardoefeningen

Oefening 2.6.13. Jan en Piet vertrekken uit eenzelfde plaats. Jan wandelt eerst 2 km in een richting 45° ten noorden van het westen, daarna gaat hij nog 5 km in een richting 30° oostelijk van het noorden. Piet loopt 7 km in noordoostelijke richting (45° ten noorden van het oosten). Wat is de plaats van Jan ten opzichte van Piet?

Uitwerking: We maken een grafiek om beide wandelingen weer te geven.



De vector $\vec{d}$ is de verplaatsing die Piet moet maken om bij Jan uit te geraken. Hiertoe berekenen we $\vec{j} = \vec{p} + \vec{d}$ met (de nodige hoek is de hoek met de positieve x-as, tegen de wijzers in):

$$\begin{aligned}\vec{j} &= 2(\cos 135°, \sin 135°) + 5(\cos 60°, \sin 60°)\\ &= (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) + \frac{5}{2}(1, \sqrt{3})\\ &\approx (1,1; 5,7)\,,\\ \vec{p} &= 7(\cos 45°, \sin 45°)\\ &=\approx (4,9; 4,9)\,.\end{aligned}$$

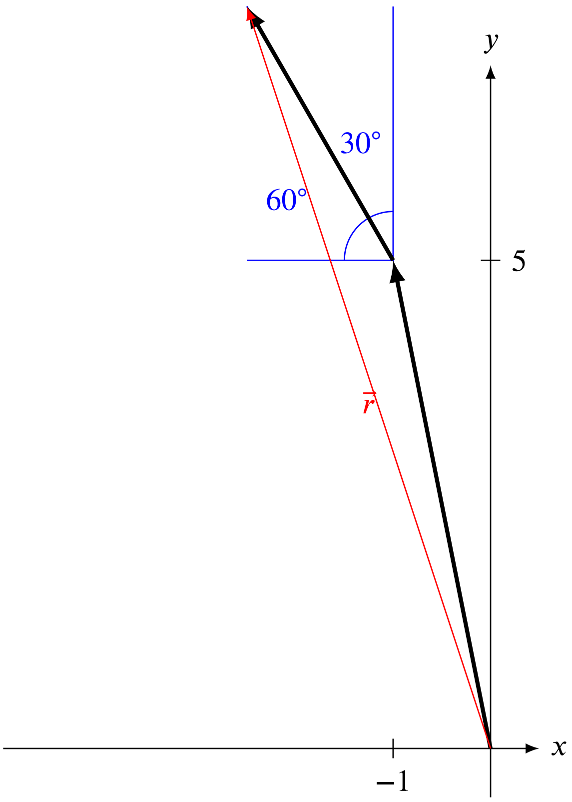
De totale verplaatsing vinden we dan als

$$\vec{d} = \vec{j} - \vec{p} = (-3,8; 0,8)\ \text{km}\,.$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.C Gevorderde oefeningen

Oefening 2.6.14. De top van een berg bevindt zich op het punt $(-1, 5)$ t.o.v. een bepaald stelsel. De positievector van een vogel t.o.v. deze top is 500 m in een richting 30° naar links t.o.v. de verticale. Wat is de afstand van de vogel tot de oorsprong van het stelsel? $r \approx 505$ m



Uitwerking:

De x- en y-coördinaten van $\vec{r}$ kunnen bepaald worden op de volgende manier:

$$\vec{r} = (-1, 5) + (-500\cos 60°, 500\sin 60°)$$
$$(-1, 5) + (-250, 433)$$
$$= (-251, 438)$$

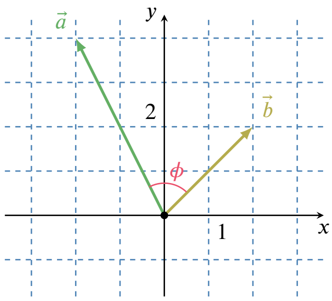
De lengte van deze vector is dan:

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{(251\ \text{m})^2 + (438\ \text{m})^2}$$
$$= 504.8...\ \text{m} \approx 505\ \text{m}$$

Oefening 2.6.15. Bepaal de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zoals weergegeven op de figuur.

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.C Gevorderde oefeningen



$$\varphi = 72\ °$$

Uitwerking: We zullen gebruiken dat $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos\varphi$ om de hoek φ te bepalen. Op de figuur zien we dat $\vec{a} = (-2, 4)$ en $\vec{b} = (2, 2)$. Bijgevolg kunnen we het scalair product berekenen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = -4 + 8 = 4\,.$$

Anderzijds berekenen we dat $\|\vec{a}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$ en dat $\left\|\vec{b}\right\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$. Dit geeft ons dat $\cos\varphi = \dfrac{4}{\sqrt{20}\sqrt{8}}$, oftewel

$$\varphi = \text{bgcos}\left(\frac{4}{\sqrt{160}}\right) = 72°\,.$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Intro kinematica

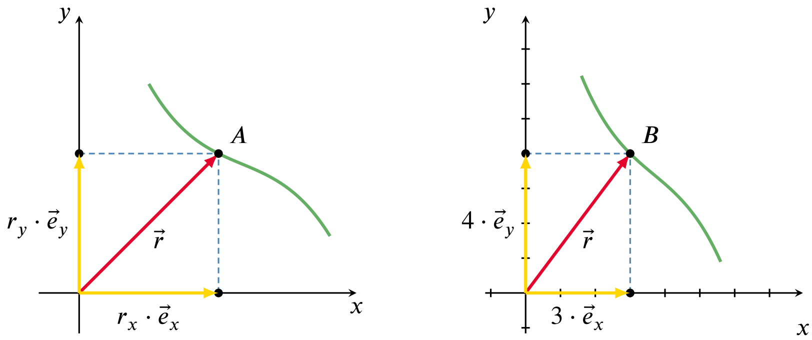
In de kinematica bestuderen we de wiskundige beschrijving van de beweging zonder de oorzaak van de beweging in rekening te brengen. De positie, snelheid en versnelling van het bewegende voorwerp, en meer bepaald hun tijdsverloop, staan hierbij centraal. Aangezien dit vectoriële grootheden zijn, zullen we vectoren invoeren om deze te beschrijven.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Grootheden kinematica

3.2.1 Positie- en verplaatsingsvector

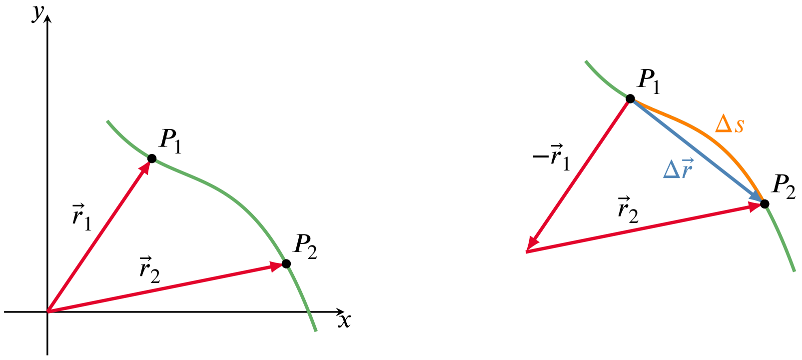
Definitie 3.2.1. De positie van het systeem op een tijdstip t ten opzichte van een gekozen oorsprong O, geven we weer met de positievector (of plaatsvector) $\vec{r}$.



Figuur 12 – Positievector.

De vector $\vec{r}$ heeft componenten r_x en r_y. De componenten r_x en r_y op een ogenblik t zijn gelijk aan de coördinaten x en y van het punt A waar het systeem zich op dat tijdstip bevindt en kunnen dus eventueel ook daarmee genoteerd worden. In het voorbeeld heeft B als coördinaten $x = 3$ en $y = 4$. Bijgevolg heeft de bijhorende plaatsvector $\vec{r}$ als componenten $r_x = +3$ en $r_y = +4$.

Als het systeem een baan beschrijft in het (x, y)-vlak, verandert de richting en/of de grootte van de vector $\vec{r}$. We bekijken de beweging van het systeem van het tijdstip t_1 tot t_2. Op het tijdstip t_1 is de positievector $\vec{r}_1$, op tijdstip t_2 is die vector $\vec{r}_2$.



Figuur 13 – Verplaatsingsvector.

Definitie 3.2.2. De afgelegde weg Δs is de afstand die het systeem in die tijd langs de baan aflegt. Δs is een getal en is altijd positief.

De verplaatsing $\Delta\vec{r}$ is $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Dat is een vector die wijst van punt 1 naar punt 2.

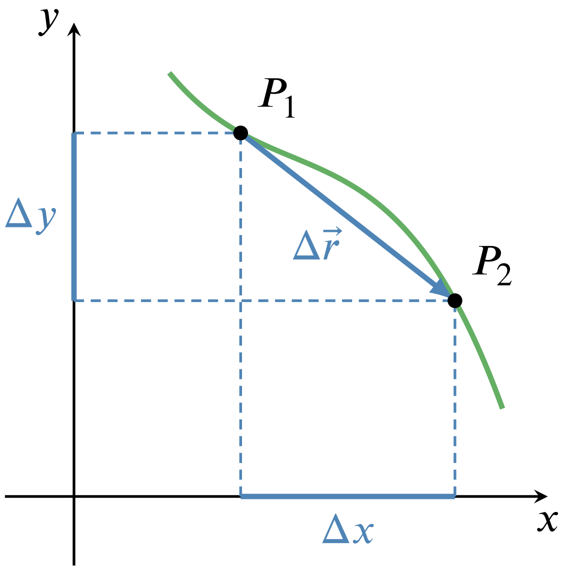
CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Grootheden kinematica

Voor de componenten van de vector $\Delta\vec{r}$ geldt

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(r_{2x} - r_{1x}, r_{2y} - r_{1y}\right) \\ &= \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1\right) \\ &= (\Delta x, \Delta y).\end{aligned}$$

De componenten van $\Delta\vec{r}$ komen dus overeen met de verplaatsing Δx en Δy t.o.v. respectievelijk de x-en de y-as. In onderstaande figuur is Δx positief en Δy negatief.



Figuur 14 – Componenten van de verplaatsingsvector.

3.2.2 De snelheidsvector

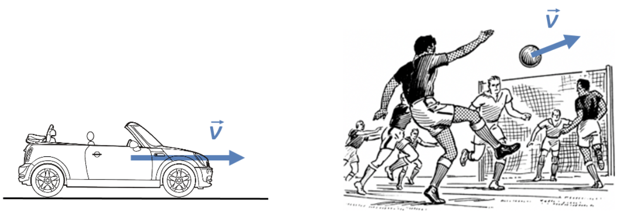
Wanneer een voorwerp in beweging is, kan je met de snelheidsvector aangeven hoe de beweging verloopt:

(a) Welke richting gaat de beweging uit (horizontaal, schuin, verticaal, ...)?

(b) In deze richting, naar welke kant (zin) beweegt het voorwerp (omhoog, omlaag, links, rechts, ...)?

(c) Hoeveel meter legt het voorwerp per seconde af (als het zijn snelheid zou aanhouden)?

Op een figuur geven we dit weer met een vector (pijl) : $\vec{v}$.



Figuur 15 – De snelheidsvector.

De grootte van de snelheid noteren we met de letter v. De eenheid is m/s. De snelheidsvector raakt altijd aan de baan van het voorwerp.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2.3 De versnellingsvector

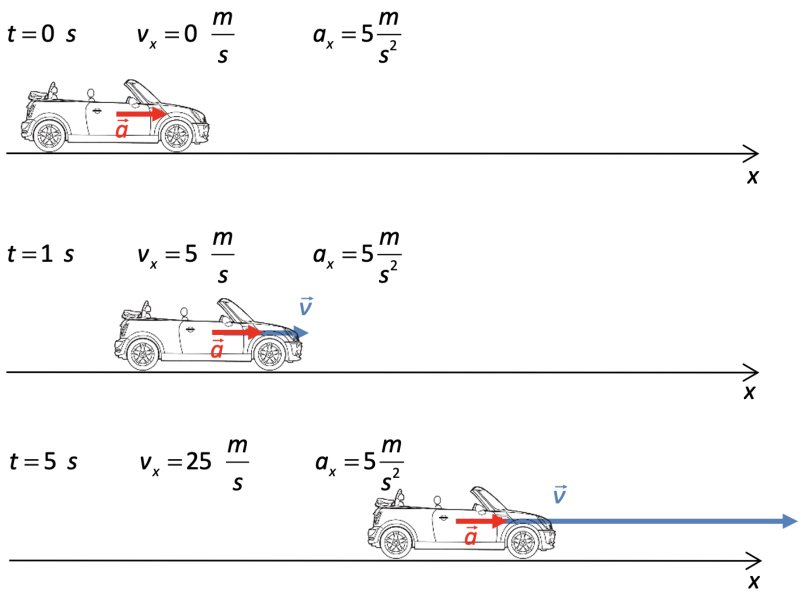
Wanneer de snelheidsvector van een voorwerp verandert, zeggen we dat het voorwerp "versnelt". Dit woord kan soms wat verwarrend zijn omdat een snelheidsverandering ook een vertraging en/of (in twee dimensies) ook een afbuiging kan zijn. Toch spreken we steeds van een versnelling. We gaan nu verder in één dimensie (of dus zonder afbuiging, met andere woorden op een rechte baan).

We duiden de versnelling aan met een vector $\vec{a}$.

De grootte van de versnelling duiden we aan met de letter a. De eenheid is m/s^2.

> **Eigenschap 3.2.1.** Wanneer de versnellingsvector dezelfde zin heeft als de snelheidsvector, dan neemt de snelheid in grootte toe (versnelling).
>
> Wanneer de versnellingsvector een tegengestelde zin heeft t.o.v. de snelheidsvector, dan neemt de snelheid in grootte af (vertraging).

In het eerste voorbeeld zien we dat de wagen versnelt (zie onderstaande figuur): de snelheidsvector en de versnellingsvector wijzen dezelfde kant op.

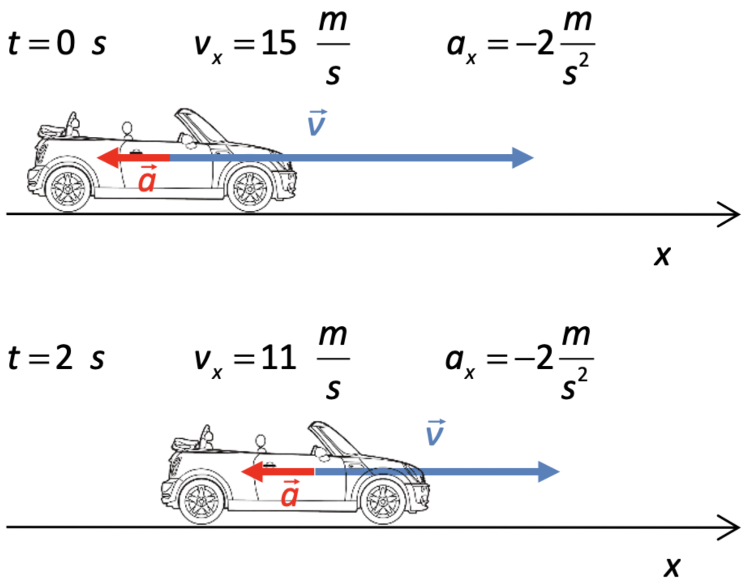


Figuur 16 – De versnellingsvector heeft dezelfde zin als de snelheidsvector : de grootte van de voorwaartse snelheid neemt toe.

In het tweede voorbeeld zien we dat de wagen vertraagt (zie onderstaande figuur). De snelheidsvector wijst tegengesteld aan de versnellingsvector.

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Grootheden kinematica



Figuur 17 – De zin van de versnellingsvector is tegengesteld aan de zin van de snelheidsvector : de grootte van de voorwaartse snelheidsvector neemt af.

Verdere mogelijkheden zouden zijn : 1) snelheids- en versnellingsvector achteruit : de grootte van de achterwaartse snelheid neemt toe ; en 2) snelheidsvector achteruit en versnellingsvector vooruit : de grootte van de achterwaartse snelheid neemt af.

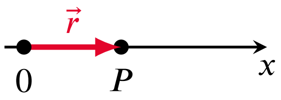
CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Eén-dimensionale kinematica

3.3.1 Positie

In een eerste stap beschrijven we de positie van een massapunt dat 1D beweegt, dus langs een rechte. Hiertoe kiezen we een x-as volgens deze rechte. De pijl op de x-as geeft aan in welke zin de x-waarde toeneemt. Als ook een oorsprong ($x = 0$) op deze rechte wordt vastgelegd, dan is de **positie** van het punt éénduidig bepaald door zijn x-coördinaat.

De positievector ligt op de x-as. De x-component van de positievector is gelijk aan de x-coördinaat van de positie: $r_x = x$



Figuur 18 – De positievector bij een beweging langs een x-as.

Wanneer het massapunt verandert van positie, ondergaat het een **verplaatsing ten opzichte van de x-as**. Als het punt van een beginpositie x_i naar een eindpositie x_f beweegt, dan is de verplaatsing

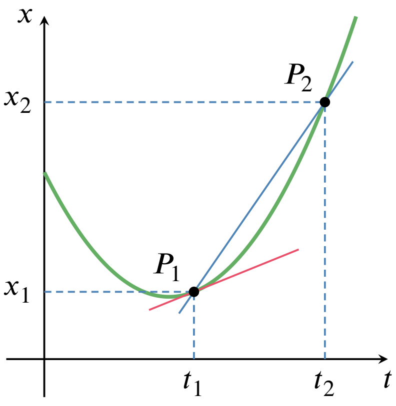
$$\Delta x = x_f - x_i.$$

De SI-eenheid van positie en verplaatsing is meter (m).

> **Opmerking 3.3.1.** De verplaatsing ten opzichte van een gekozen as kan positief, negatief of nul zijn. Er is dus een belangrijk verschil tussen de verplaatsing en de werkelijk afgelegde weg, die steeds positief is. Stel je fietst heen en terug van je huis naar de supermarkt, 2 km verderop. De totaal afgelegde weg is 4 km terwijl de verplaatsing nul is omdat het begin- en eindpunt samenvallen.

3.3.2 Snelheid

In een volgende stap bekijken we hoeveel tijd er verloopt tijdens een verplaatsing van een object. Of anders, hoe snel kan dat object bewegen? Bijvoorbeeld, hoeveel seconden heeft een sprinter nodig om de 100 m sprint af te leggen op een atletiekpiste?
Zo komen we tot het begrip snelheid. De snelheid kan dus bepaald worden als we informatie hebben over de positie x als functie van de tijd t. Deze informatie kan grafisch weergegeven worden in een $x(t)$-grafiek (zie onderstaande figuur) of in een algebraïsche uitdrukking. Deze geven voor elk tijdstip t de positie x van het object weer.



Figuur 19 – De grafiek van x als functie van t geeft ons de nodige informatie om gemiddelde of ogenblikkelijke snelheden te bepalen.

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Eén-dimensionale kinematica

Definitie 3.3.1. De gemiddelde snelheid $v_{x,g}$ t.o.v. de x-as in het interval Δt is

$$v_{x,g} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Hierin wordt x uitgedrukt in meter en t in seconden. Snelheid wordt uitgedrukt in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

In de definitie wordt niet de afgelegde weg Δs, maar de verplaatsing Δx gebruikt! Hieruit volgt dat de gemiddelde snelheid t.o.v. de x-as zoals gedefinieerd in de fysica ook negatief kan zijn.
De helling van de verbindingslijn (dit is de blauwe lijn) tussen de twee punten P_1 en P_2 op de $x(t)$-grafiek (in figuur 19) is gelijk aan de gemiddelde snelheid ten opzichte van de x-as gedurende dat tijdsinterval. Deze kan positief, negatief of nul zijn.

Eigenschap 3.3.1. De gemiddelde snelheid $v_{x,g}$ is

(a) positief als het systeem beweegt in de positieve zin van de x-as;

(b) negatief als het systeem beweegt in de negatieve zin van de x-as.

Dit geeft ons slechts een globaal beeld van de snelheid. Als we een meer nauwkeurige beschrijving van de beweging willen kennen, moeten we de gemiddelde snelheid berekenen over kortere tijdsperiodes. Een nog betere realistische beschrijving kan bekomen worden door de snelheid te kennen op elk ogenblik, de zogenaamde ogenblikkelijke snelheid.

Definitie 3.3.2. De ogenblikkelijke snelheid v_x t.o.v. de x-as op het ogenblik t is:

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Dat is de afgeleide van x naar t

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}.$$

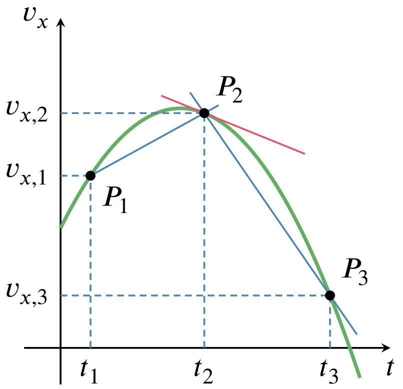
De $v_x(t)$-functie noemen we de snelheidsvergelijking.

De snelheid op een bepaald tijdstip t_1 is de helling van de raaklijn (dit is de rode lijn) aan de $x(t)$-grafiek in het punt t_1 (zie figuur 19).

CC BY-NC-SA 4.0

3.3.3 Versnelling

Net zoals de snelheid de verandering is van de positie met de tijd, is de versnelling de verandering van de snelheid met de tijd. Met andere woorden, een voorwerp versnelt als zijn snelheid verandert. Een auto die aan een rood licht stilstond en plots vertrekt als het licht op groen springt, voert een versnelde beweging uit (hij trekt bijvoorbeeld op van 0 naar 50 km/u). De gemiddelde versnelling is de verhouding van de snelheidsverandering tot de tijdsduur waarover deze verandering plaatsvindt. In onderstaande figuur is de helling van de verbindingslijn tussen P_1 en P_2 de gemiddelde (positieve) versnelling in het tijdsinterval $t_2 - t_1$. Analoog is de helling van de verbindingslijn tussen P_2 en P_3 de (negatieve) versnelling over het tijdsinterval $t_3 - t_2$. De helling van de rode raaklijn aan de $v(t)$-grafiek in P_2 geeft de ogenblikkelijke versnelling op tijdstip t_2.



Figuur 20 – De hellingen van de verbindingslijnen tussen de aangeduide punten geeft de gemiddelde versnellingen op de respectievelijke tijdsintervallen. De helling van de rode raaklijn geeft de ogenblikkelijke versnelling op tijdstip t_2.

Definitie 3.3.3. De gemiddelde versnelling $a_{x,g}$ t.o.v. de x-as in het interval Δt is

$$a_{x,g} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{x,2} - v_{x,1}}{t_2 - t_1}.$$

Versnelling wordt uitgedrukt in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

De gemiddelde versnelling kan positief, negatief of nul zijn. Zie figuur **??**.

Eigenschap 3.3.2. De gemiddelde versnelling $a_{x,g}$ is

(a) positief als het systeem versnelt in positieve zin van de x-as of vertraagt in negatieve zin;

(b) negatief als het systeem versnelt in negatieve zin van de x-as of vertraagt in positieve zin.

Analoog als hierboven voor de snelheid, wordt in de limiet voor steeds kleinere tijdsintervallen deze gemiddelde versnelling een ogenblikkelijke versnelling.

Definitie 3.3.4. De ogenblikkelijke versnelling a_x t.o.v. de x-as op het ogenblik t is:

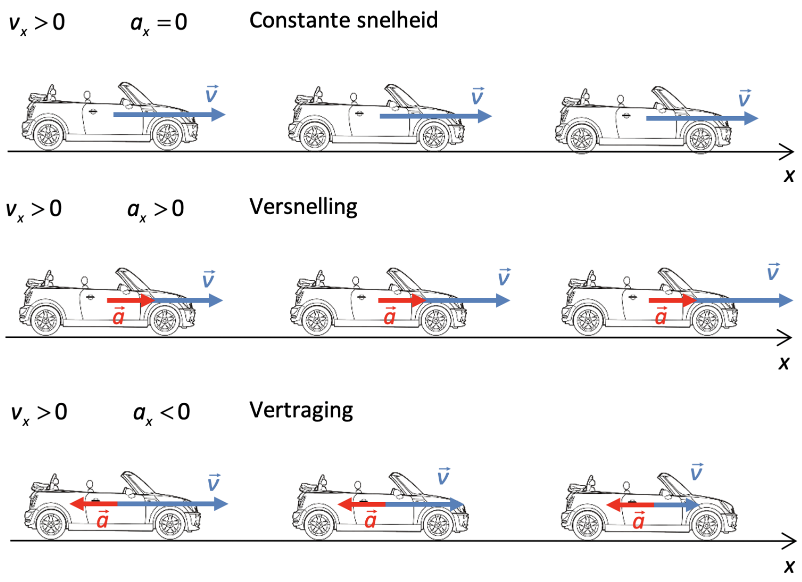
$$a_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}.$$

Dat is de afgeleide van v_x naar t:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Eén-dimensionale kinematica



Figuur 21 – Versnelling en vertraging.

De $a_x(t)$-functie is de versnellingsvergelijking.

Een goed gekende versnelling is de valversnelling op aarde, deze is bij benadering $9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Dit betekent dat de snelheid van vallende objecten elke seconde verandert met $9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Opmerking 3.3.2. Om een voorwerp te doen versnellen moet op dat voorwerp een resulterende kracht werken. Later zullen we zien dat er een vast verband bestaat tussen deze resulterende kracht en de versnelling: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Omdat dit een vectorieel verband is, betekent dit dat de resulterende kracht en de versnelling dezelfde richting en zin hebben (immers, $m > 0$).

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Eén-dimensionale bewegingen

3.4.1 De eenparige rechtlijnige beweging

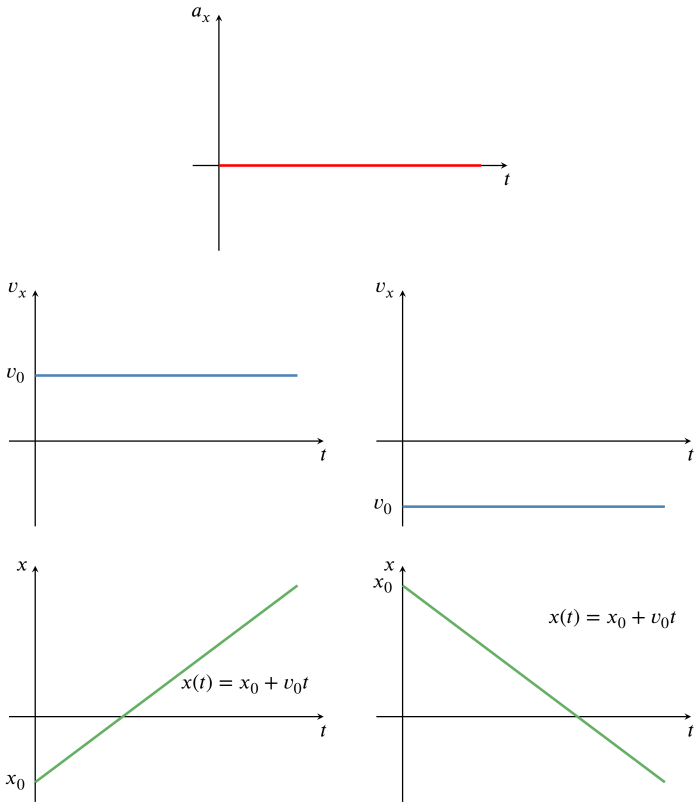
Een eenparige rechtlijnige beweging (ERB) is een beweging die verloopt met een constante snelheid langsheen een rechte. De versnelling is bijgevolg 0.

$$a_x(t) = 0$$
$$v_x(t) = v_{x,0}.$$

De constante snelheid kan positief of negatief zijn ten opzichte van een gekozen x-as. De positie x neemt dan lineair toe (of af) in de tijd. De positie als functie van de tijd voor dit soort beweging wordt gegeven door :

$$x(t) = x_0 + v_{x,0} \cdot t,$$

Hierbij is x_0 de beginpositie ten opzichte van de x-as en $v_{x,0}$ de constante snelheid langsheen de rechte. Deze bewegingsvergelijking beschrijft in de $x(t)$-grafiek een rechte met een positieve of negatieve helling, zoals weergegeven in volgende figuur.



Figuur 22 – Positie, snelheid en versnelling als functie van de tijd voor een eenparige rechtlijnige beweging met een positieve en negatieve snelheid v_0.

3.4.2 De eenparig versnelde rechtlijnige beweging

Ten slotte bekijken we de eenparig versnelde rechtlijnige beweging (EVRB). Dit is een beweging die verloopt met een constante versnelling langsheen een rechte. De versnelling a_x kan positief of negatief zijn ten opzichte van een gekozen x-as langs de rechte. De snelheid v_x neemt dan lineair toe (of af) in de tijd. Dit betekent dat

$$v_x(t) = v_{x,0} + a_x \cdot t$$

met $v_{x,0}$ de beginsnelheid ten opzichte van de x-as.

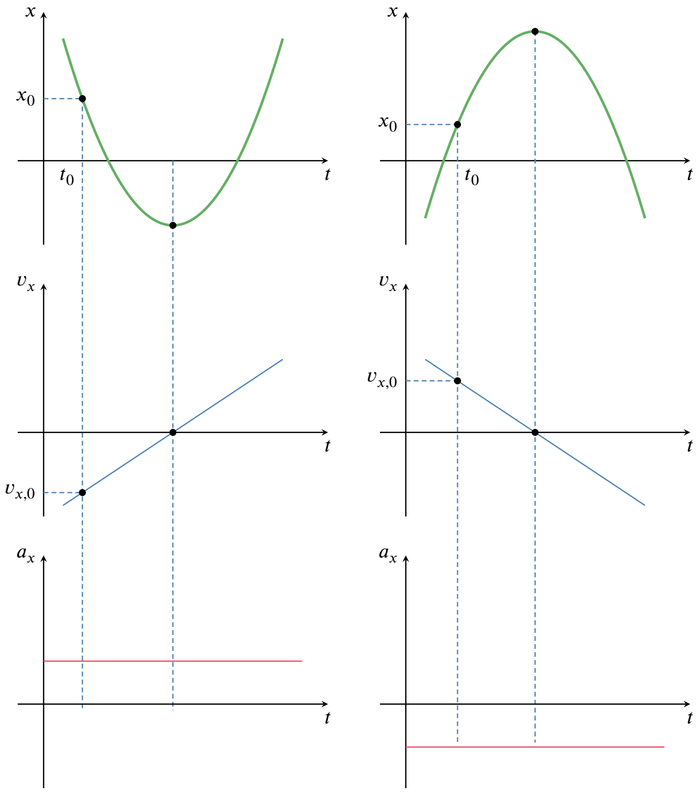
Deze snelheidsvergelijking beschrijft een rechte op een $v_x(t)$-grafiek.

De positie als functie van de tijd voor dit soort bewegingen wordt gegeven door:

$$x(t) = x_0 + v_{x,0} \cdot t + a_x \cdot \frac{t^2}{2}$$

met x_0 de beginpositie ten opzichte van de x-as.

Deze bewegingsvergelijking beschrijft een parabool op een $x(t)$-grafiek (zie figuur 23). Merk op dat de afgeleide van de bewegingsvergelijking gelijk is aan de snelheidsvergelijking.



Figuur 23 – Positie, snelheid en versnelling als functie van de tijd voor een eenparig versnelde rechtlijnige beweging met een positieve en negatieve versnelling a_x.

Wanneer de versnelling nul is tijdens een ééndimensionale beweging, dan noemt men de beweging een eenparige rechtlijnige beweging (ERB). De bewegingsvergelijking en de snelheidsvergelijking zijn dan

$$x(t) = x_0 + v_{x,0} \cdot t,$$

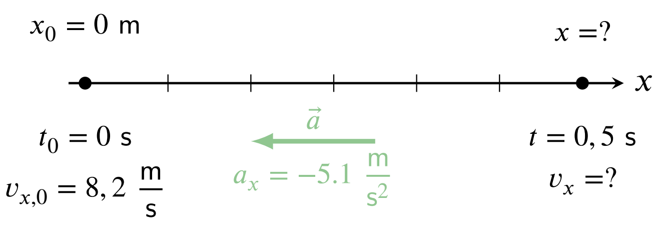
$$v_x(t) = v_{x,0}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Voorbeeldoefening

Oefening 3.5.1. Een wagen komt aangereden aan een snelheid van $8,2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ en moet plots remmen. De vertraging bedraagt $5,1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Wat is de positie en de snelheid van de wagen na $0,5$ s ?

Uitwerking: We maken een grafische voorstelling van de opgave.



We veronderstellen dat de versnelling van de wagen constant is: we kunnen bijgevolg de formules voor de positie en de snelheid van de eenparig veranderlijke beweging gebruiken.

$$x(t) = x_0 + v_{x,0} \cdot t + a_x \cdot \frac{t^2}{2} \qquad \text{en} \qquad v_x(t) = v_{x,0} + a_x \cdot t.$$

We vullen de gegevens uit het schema in in de vergelijkingen en bekomen de positie en de snelheid van de wagen na $0,5$ s:

$$\begin{aligned} x(0,5\ \mathrm{s}) &= 0 + 8,2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0,5\ \mathrm{s} - 5,1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{0,5^2\ \mathrm{s}^2}{2} &&= 3,5\ \mathrm{m} \\ v_x(0,5\ \mathrm{s}) &= 8,2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 5,1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0,5\ \mathrm{s} &&= 5,7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

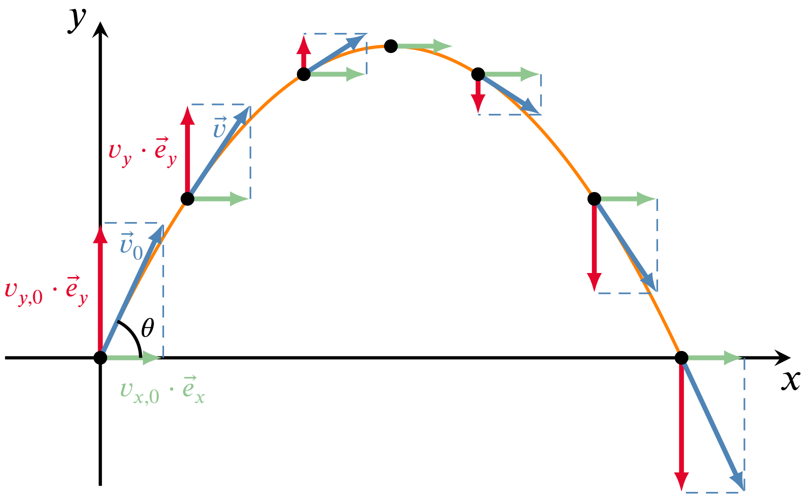
CC BY-NC-SA 4.0

3.6 Twee-dimensionale kinematica

In tegenstelling tot de vorige paragraaf waar enkel rechtlijnige bewegingen (1 dimensie) werden beschouwd, bekijken we nu bewegingen in een vlak (2-dimensionaal). Daartoe splitsen we de beschrijving van de beweging op in twee 1-dimensionale bewegingen, nl. in de x- en de y-richting.

3.6.1 Projectielbeweging - Schuine worp

Een voorbeeld van een 2-dimensionale beweging is de **projectielbeweging**. Dit is de beweging van een projectiel (kogel, bal, ...) nadat dit werd weggeschoten of weggegooid onder een bepaalde hoek θ met de horizontale richting. Luchtwrijving wordt verwaarloosd. Men spreekt ook van **schuine worp**. Het projectiel beschrijft een parabolische baan en landt na een bepaalde tijd t terug op de grond.



Figuur 24 – De verticale component van de snelheid verandert van grootte en zin terwijl de horizontale component steeds hetzelfde blijft.

Eigenschap 3.6.1. Indien enkel de zwaartekracht op het voorwerp inwerkt, en de worp vanuit de oorsprong (0,0) vertrekt, bekom je voor de bewegingsvergelijking en de snelheidsvergelijking van de schuine worp ten opzichte van gekozen x- en y-as:

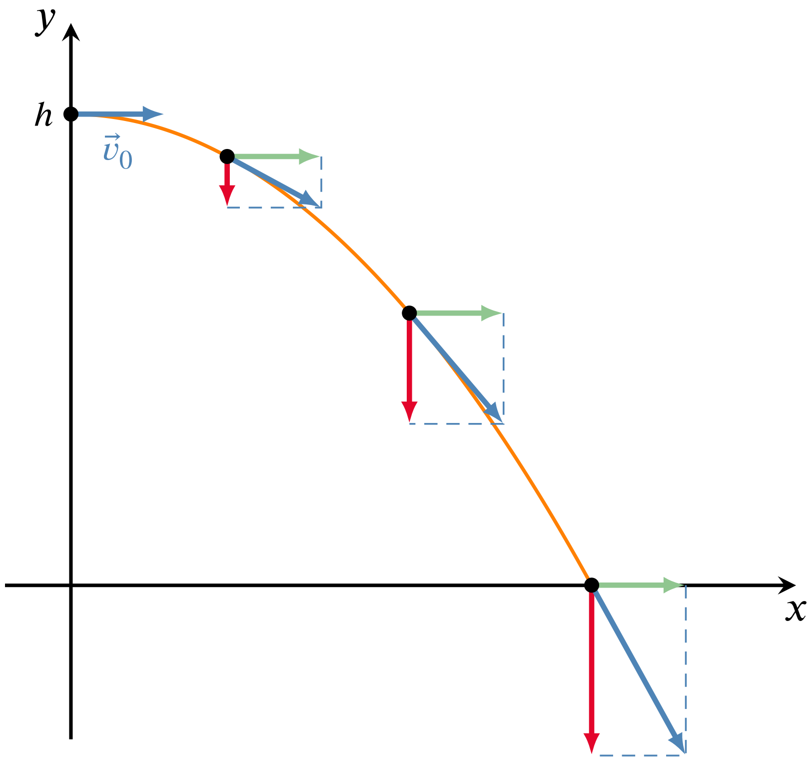
$$x(t) = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t \qquad \text{en} \qquad y(t) = v_0 \cdot \sin\theta \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2}$$
$$v_x(t) = v_0 \cdot \cos\theta \qquad\qquad v_y(t) = v_0 \cdot \sin\theta - g \cdot t$$

Er is enkel sprake van een versnelling in de y-richting. Deze versnelling is gelijk aan $a_y = -g$ omdat de zwaartekracht met grootte $F_z = m \cdot g$ tegen de gekozen opwaartse y-as in wijst.

3.6.2 Horizontale worp

Een speciaal geval van een schuine worp is een projectiel dat horizontaal wordt gelanceerd. Zo is de hoek tussen de beginsnelheid en de horizontale richting gelijk aan $\theta = 0°$. We kiezen hier het vertrek van de worp in het punt (0,h).

CC BY-NC-SA 4.0



Figuur 25 – Horizontale worp.

Eigenschap 3.6.2. Voor de horizontale worp vinden we de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$x(t) = v_0 \cdot t \qquad \text{en} \qquad y(t) = h - g \cdot \frac{t^2}{2}$$
$$v_x(t) = v_0 \qquad\qquad v_y(t) = -g \cdot t$$

Oefening 3.6.1. Een kogel wordt horizontaal weggeschoten vanop een muur met hoogte $h = 50$ m. De kogel treft de grond (en het doelwit) op 400 m afstand van de muur. Hoe groot was de (horizontale) beginsnelheid van de kogel? Verwaarloos de luchtweerstand.

Uitwerking: Stel dat de kogel op de grond valt op het tijdstip t, dan is de x-positie van de kogel 400 m en de y-positie 0 m. Er geldt dus dat $400 \text{ m} = 0 \text{ m} + \mathrm{v_0} \cdot \mathrm{t}$.

En dus is

$$t = \frac{400 \text{ m}}{v_0}.$$

Voor de y-richting kunnen we dan schrijven dat:

$$0 = 50 \text{ m} - \mathrm{g} \cdot \frac{\mathrm{t}^2}{2}$$
$$0 = 50 \text{ m} - \mathrm{g} \cdot \frac{\left(\frac{400 \text{ m}}{\mathrm{v_0}}\right)^2}{2}$$
$$v_0 = 125 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

BESLUIT: De horizontale beginsnelheid is dus $125 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3.6.3 Verticale worp

Een projectiel dat verticaal omhoog gelanceerd wordt (projectielbeweging met $\theta = 90°$) heeft een beginsnelheid die verticaal naar boven is gericht. Door de neerwaartsgerichte valversnelling $g = 9,81$ m/s^2 zal de snelheid afnemen met toenemende hoogte en nul worden in het hoogste punt. De beweging vertraagt omdat snelheid en valversnelling tegengesteld gericht zijn. Na het hoogste punt zal de snelheid opnieuw vergroten en zal het projectiel naar beneden vallen (snelheid en valversnelling hebben dan dezelfde zin).

Omdat de beginsnelheid een x-component gelijk aan nul heeft, zal deze nul blijven gedurende gans de beweging (eenparige rechtlijnige beweging), bijgevolg voert het projectiel een ééndimensionale, versnelde rechtlijnige beweging uit volgens de y-as.

Eigenschap 3.6.3. Indien je de y-as verticaal omhoog kiest, bekom je voor de bewegingsvergelijking en snelheidsvergelijking van een verticale worp:

$$y(t) = y_0 + v_{y,0} \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \qquad \text{en} \qquad v_y(t) = v_{y,0} - g \cdot t$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.7 De cirkelvormige beweging

3.7.1 Positie en hoeksnelheid

Bij het begin van dit hoofdstuk hebben we de rechtlijnige beweging besproken. De verplaatsing gebeurt dan volgens een rechte. De positie op deze rechte wordt vastgelegd met behulp van de positie x als functie van de tijd. Bij een cirkelvormige beweging is het handig om de positie aan te duiden met behulp van de hoek θ die varieert in de tijd (zie figuur 26). De afgelegde of doorlopen hoek in het tijdsinterval $\Delta t = t_2 - t_1$ is dan $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

De gemiddelde hoeksnelheid is bijgevolg

$$\omega_g = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Deze wordt uitgedrukt in rad/s.

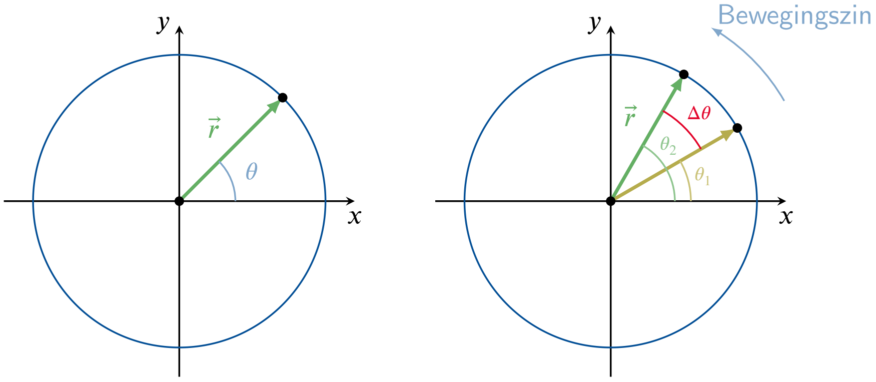
Omdat met een volledige omwenteling een hoek van 2π overeenkomt, kan je ook schrijven dat

$$\omega_g = \frac{2\pi}{T}$$

met T de **periode**, dit is de tijd die nodig is voor een volledige omwenteling.

De ogenblikkelijke hoeksnelheid is

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}.$$



Figuur 26 – Beschrijving cirkelbeweging.

De **frequentie** f is het aantal omwentelingen per seconde. Deze wordt uitgedrukt in hertz (Hz):

$$1\,\text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}.$$

Duurt een volledige omwenteling bijvoorbeeld een halve seconde, dan zijn er per seconde twee volledige omwentelingen: de frequentie is dus het omgekeerde van de periode. Dit is algemeen geldig. Tussen de periode en de frequentie bestaat bijgevolg het volgende verband:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Wanneer de cirkelbeweging aan een constante hoeksnelheid verloopt, noemen we deze beweging een **eenparige cirkelvormige beweging (ECB)**. Er geldt dan dat $\omega = \omega_g$ en dus $\omega = 2\pi \cdot f$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.7 De cirkelvormige beweging

Voorbeeld 3.7.1. Een boormachine doet 600 toeren per minuut. Hieruit volgt dat

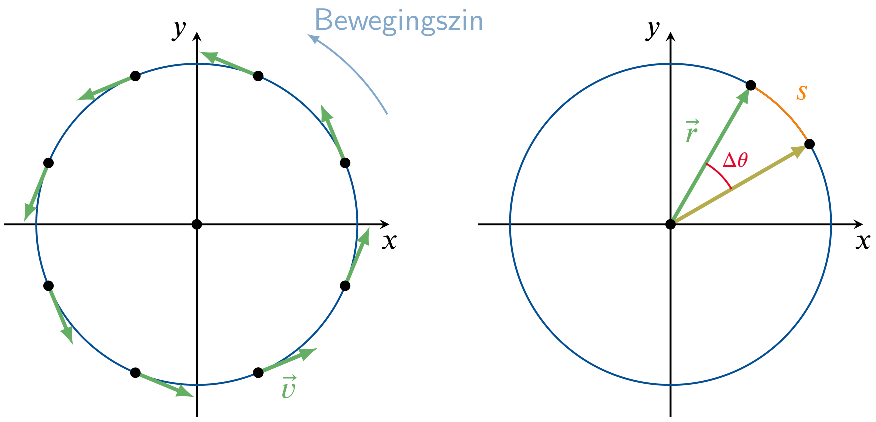
$$f = \frac{600 \text{ toeren}}{60 \text{ s}} = \frac{10 \text{ toeren}}{1 \text{ s}} = 10 \text{ Hz}.$$

De periode bedraagt

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10 \text{ Hz}} = 0,10 \text{ s}.$$

3.7.2 Omtreksnelheid of baansnelheid

De snelheidsvector $\vec{v}$ (baansnelheid) raakt op elk tijdstip aan de cirkelbaan.



Figuur 27 – *(a)* De snelheidsvector raakt op elk ogenblik aan de cirkel. *(b)* Verband tussen de booglengte en de doorlopen hoek.

Als je de hoeken uitdrukt in radialen, geldt dat de booglengte s gelijk is aan de doorlopen hoek maal de straal ($s = r \cdot \Delta\theta$). Bijgevolg kunnen we het verband afleiden tussen de grootte van de baansnelheid v, en de hoeksnelheid ω:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{r \cdot d\theta}{dt} = r \cdot \frac{d\theta}{dt} = r \cdot \omega.$$

De grootte van deze omtreksnelheid of baansnelheid wordt uitgedrukt in m/s. Bij zekere hoeksnelheid ω geldt: hoe groter de straal van de cirkel, hoe groter de omtreksnelheid wordt.

Bij eenparige cirkelvormige bewegingen is de grootte van omtreksnelheid constant.

3.7.3 Versnelling

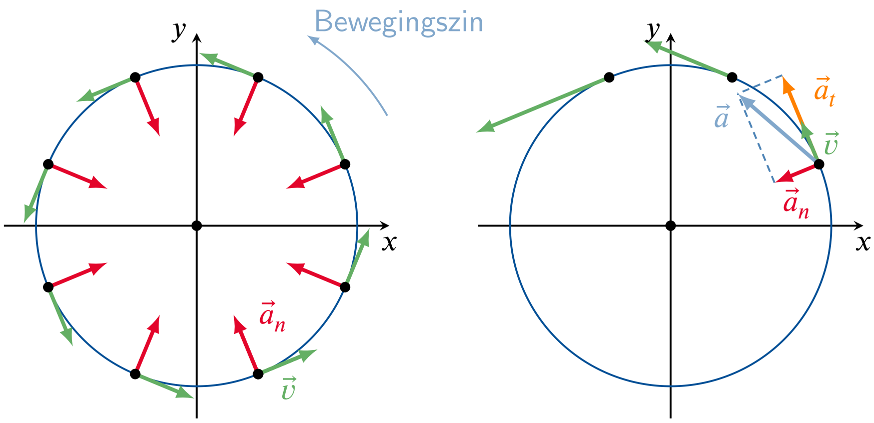
Bij een cirkelbeweging verandert de baansnelheid $\vec{v}$ voortdurend van richting (snelheidsverandering = versnelling). De versnelling die deze richtingsverandering beschrijft, is de normale of centripetale versnelling

$$a_n = a_{\text{cp}} = \frac{v^2}{r}.$$

Deze wijst naar het centrum van de cirkel.

CC BY-NC-SA 4.0

3.7 De cirkelvormige beweging



Figuur 28 – *(a)* Eenparige cirkelvormige beweging. *(b)* Niet-eenparige cirkelvormige beweging.

Als de grootte van de snelheidsvector $\vec{v}$ constant blijft, spreken we over een eenparige cirkelvormige beweging, deze wordt getoond in figuur 28(a). Wanneer echter de grootte van de baansnelheid $\vec{v}$ toeneemt of afneemt, spreken we over een niet-eenparige cirkelvormige beweging (figuur 28b)). In dit laatste geval kan de versnelling ontbonden worden in twee componenten. Enerzijds de normale versnelling $\vec{a}_n$ die de verandering van de richting van de snelheid beschrijft en anderzijds de tangentiële versnelling $\vec{a}_t$ die verandering van de grootte van de snelheid beschrijft. De totale versnelling is dan de vectorsom

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n.$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.8 Oefeningen Kinematica

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

A) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

B) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

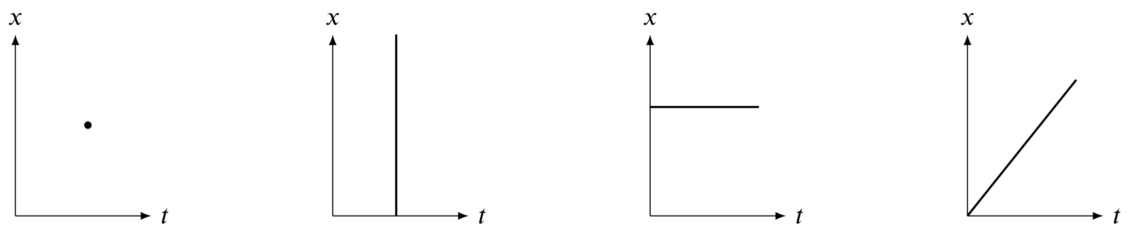
C) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.A Instapoefeningen

Oefening 3.8.1. Welke grafiek in de figuur stelt een voorwerp in rust voor? C✓

Neem aan dat dit voorwerp enkel volgens een rechte baan beweegt (de x-as).



(A) (B) (C) (D)

Uitwerking: We zoeken een grafiek waarin de positie x van een voorwerp in de tijd t niet verandert. Een voorwerp is in rust als het op elk tijdstip op dezelfde plaats blijft. Dat betekent dat de grafiek een horizontale lijn moet zijn.

Grafiek A bestaat uit één punt. Er is dus te weinig informatie om te weten of het voorwerp beweegt of niet.

Grafiek B toont een verticale lijn. Dit betekent dat op één tijdstip meerdere posities worden ingenomen, wat fysisch onmogelijk is.

Grafiek C toont een horiontale lijn. De positie x blijft hetzelfde bij elk tijdstip t. Deze grafiek stelt een voorwerp in rust voor en is dus het juiste alternatief.

Grafiek D is een stijgende rechte lijn. De positie x neemt toe met de tijd t, dit betekent dat het voorwerp beweegt met een constante snelheid.

Oefening 3.8.2.

1. Joseph DeLoach uit de Verenigde Staten behaalde in 1988 met een tijd van 19,75 seconden op de 200m sprint een Olympisch record. Wat was zijn gemiddelde snelheid? Geef je antwoord in m/s en km/h.

$$v_{x,g} = 10.1 \text{ m/s } = 36.5 \text{ km/h.}$$

Uitwerking: De gemiddelde snelheid wordt berekend als $v_{x,g} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Onze gegevens zijn in meter en seconde, en bijgevolg vinden we eenvoudig dat

$$v_{x,g} = \frac{200 \text{ m}}{19,75 \text{ s}} = 10,1 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Om dit om te zetten naar km/h, moeten we vermenigvuldigen met 3.6:

$$10,1 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 10,1 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{3600 \text{ s}}{\text{h}} \frac{\text{km}}{1000 \text{ m}} = 10,1 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 3,6 = 36,5 \frac{\text{km}}{\text{h}} .$$

In deze berekening hebben we gebruikt gemaakt van het feit dat

$$1 = \frac{3600 \text{ s}}{\text{h}} = \frac{1000 \text{ m}}{\text{km}} ,$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.A Instapoefeningen

om vervolgens eenheden die zowel in de teller als de noemer voorkomen te schrappen tegen elkaar.

2. In 1992 behaalde Zhuang Yong uit China een Olympisch record op de 100m vrije slag zwemmen voor vrouwen met een tijd van 54,64 seconden. Wat was haar gemiddelde snelheid in m/s en in km/h?

$$v_{x,g} = 1.83 \text{ m/s} = 6.59 \text{ km/h}$$

Oefening 3.8.3. Als de snelheid van een object verschillend is van nul, kan zijn versnelling dan nul zijn? Geef een voorbeeld als je antwoord ja is, leg uit waarom als je antwoord nee is.

Ja✓

Uitwerking: Als het object beweegt met een constante snelheid in 1 bepaalde richting is de versnelling nul.

Oefening 3.8.4. Als de snelheid van een object nul is op een gegeven tijdstip,

1. kan zijn versnelling dan nul zijn op dat ogenblik? Ja✓ Leg uit.

2. is het mogelijk dat de versnelling van het object op dat tijdstip verschillend is van nul? Ja✓ Leg uit.

Uitwerking: De versnelling van het object is nul als het voorwerp in rust is. De versnelling kan ook verschillen van nul: Een bal die recht omhoog wordt gegooid ondervindt een versnelling die naar beneden is gericht als gevolg van de zwaartekracht. Op zijn hoogste punt zal de bal 1 moment stil hangen, zonder snelheid, maar er zal dus wel nog altijd een versnelling naar beneden gericht zijn.

Oefening 3.8.5. Een fietser beweegt volgens een rechte baan en verhoogt haar snelheid gelijkmatig van 5,0 m/s naar 11,0 m/s in 12 seconden. Wat is haar versnelling, en welke afstand legt ze af in deze tijd?

$$a = 0{,}50 \text{ m/s}^2, \qquad d = 96 \text{ m}$$

Uitwerking: We kiezen de x-as volgens de rechte baan in de zin van de beweging. De gemiddelde vernelling t.o.v. de x-as is de verhouding van de snelheidsverandering tot het tijdsinterval waarover deze verandering plaatsvindt.

$$a_{x,g} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{11{,}0 - 5{,}0}{12} = \frac{6{,}0}{12} = 0{,}50 \text{ m/s}^2.$$

Het gaat hier om een eenparig versnelde rechtlijnige beweging (met constante versnelling) waarvan de positie als functie van de tijd verandert als volgt:

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_x t^2.$$

Met $x_0 = 0$m, $v_0 = 5{,}0$ m/s, $a_x = 0{,}50$ m/s^2 en $t = 12$ s:

$$x = 0 + 5{,}0 \cdot 12 + \tfrac{1}{2}(0{,}50)(12^2) = 60 + 0{,}25 \cdot 144 = 60 + 36 = 96 \text{ m}.$$

De fietser versnelt met een versnelling van 0,50 m/s^2 en legt hierbij een afstand van 96 m af.

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.A Instapoefeningen

Oefening 3.8.6. Wanneer je niest versnelt de lucht vanuit rust tot ongeveer 175 km/h in $0,60$ s. Hoe groot is de versnelling van de lucht?

$$81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Uitwerking: We bekijken een luchtdeeltje: De gemiddelde versnelling wordt dan berekend als

$$\begin{aligned} a = \frac{\Delta v}{\Delta t} &= \frac{175\ \mathrm{km/h}}{0.60\ \mathrm{s}} \\ &= \frac{175}{0.60}\frac{1000}{3600}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ &= 81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

In de tweede lijn wordt de omzetting gemaakt van km/h naar m/s.

Oefening 3.8.7. Hoeveel (grootte en richting) bedraagt de versnelling van een projectiel op het hoogste punt van de baan? Ken je ook de versnelling net voor en net na het bereiken van dit punt?

Uitwerking: Als de luchtweerstand verwaarloosd wordt, is de versnelling van het projectiel steeds verticaal naar beneden gericht, zowel op het hoogste punt als er voor / na. De grootte van de versnelling is $9,81$ m/s^2: Dit is de valversnelling.

Oefening 3.8.8. Een bal wordt verticaal naar omhoog gegooid. Welke van bijgevoegde beweringen is correct in het hoogste punt van de baan? $v = 0, a \neq 0$✓

Uitwerking: Omdat de bal eerst omhoog gaat en dan omlaag, moet de component v_y noodzakelijk van teken wisselen. Deze is daarom nul op het hoogste punt. Maar, ook op dit hoogste punt is de bal onderworpen aan de zwaartekracht van de aarde die leidt tot een kracht en dus een versnelling verschillend van nul.

Oefening 3.8.9. An en Jan staan op de top van een gebouw. An gooit een bal vertikaal naar beneden, Jan laat een bal eenvoudigweg vallen. Welke bal heeft de grootste versnelling, juist na het loslaten? Veronderstel geen wrijving.

Beide ballen hebben dezelfde versnelling✓

Uitwerking: Als An de bal naar beneden gooit, werkt een kracht van de hand van An op de bal, deze kracht verandert de bewegingstoestand van de bal, nl. het geeft de bal een beginsnelheid. Nadat de bal wordt losgelaten, is de bal enkel onderhevig aan de zwaartekracht en is zijn versnelling de valversnelling. De beginsnelheden van beide ballen zullen dus anders zijn. Van zodra beide ballen echter losgelaten worden, zijn beide ballen in vrije val en ondervinden ze dezelfde versnelling ten gevolge van de zwaartekracht van de Aarde, nl. de valversnelling.

Oefening 3.8.10. Twee kinderen zitten op een paardenmolen. Kind 1 zit op $2,0$ m van de rotatie-as verwijderd en kind 2 zit op $1,5$ m van de as verwijderd. De paardenmolen maakt één draaibeweging in $4,5$ s.

1. Vind de hoeksnelheid ω.

$$\omega_1 = 1.4\ \mathrm{rad}/s \qquad \omega_2 = 1.4\ \mathrm{rad}/s$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.A Instapoefeningen

Feedback: De hoeksnelheid is gelijk voor alle kinderen op de paardenmolen.

2. Vind de omtreksnelheid v van elk kind.

$$v_1 = 2.8\ m/s, \qquad v_2 = 2.1\ m/s$$

Feedback: Het kind aan de buitenkant van de paardenmolen heeft een grotere omtreksnelheid.

Oefening 3.8.11. Een wagen rijdt aan een constante baansnelheid op een cirkelvormige baan. Beantwoord elk van de volgende vragen met "JA" of "NEE".

1. Is de snelheid van de wagen constant? Nee✓

Feedback: De snelheid is een vector die steeds raakt aan de cirkelvormige baan. Deze snelheidsvector blijft niet constant omdat de richting van de vector telkens wijzigt.

2. Is de grootte van de snelheid constant? Ja✓

Feedback: De baansnelheid of grootte van de snelheidsvector is constant. Dit staat in de vraagstelling.

3. Is de grootte van de versnelling constant? Ja✓

Feedback: De grootte van de versnelling blijft constant omdat de baansnelheid en de straal van de cirkel constant blijven.

4. Is de richting van de versnelling constant? Nee✓

Feedback: De richting van de versnelling blijft niet constant. De versnelling is altijd gericht naar het middelpunt van de cirkel. Deze richting hangt dus af van de positie van de wagen.

Oefening 3.8.12.

1. Een auto rijdt door een bocht met een constante snelheid van 50 km/u. Wanneer de auto diezelfde bocht neemt met een constante snelheid van 70 km/u, is zijn versnelling dan anders in het eerste geval? Licht uw antwoord toe.

Uitwerking: Vermits de grootte van de snelheid constant blijft in beide gevallen, hebben we in beide gevallen enkel een centripetale versnelling. Omdat $a_{\text{cp}} = \frac{v^2}{R}$ en de straal van de bocht constant blijft, zal de grootte van de versnelling groter zijn wanneer de auto een grotere snelheid heeft.

2. Als een auto met 60 km/u een scherpe bocht neemt, en daarna met dezelfde snelheid een flauwe bocht neemt, is de versnelling dan in beide gevallen gelijk of niet? Leg uw antwoord uit.

Uitwerking: Ook hier hebben we in beide gevallen enkel een centripetale versnelling. In de scherpe bocht is de straal kleiner. Vermits $a_{\text{cp}} = \frac{v^2}{R}$ en de snelheid in beide gevallen dezelfde is, zal de grootte van de versnelling in de scherpe bocht groter zijn.

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.B Standaardoefeningen

Oefening 3.8.13. Wat zijn de grootte en richting van de totale verplaatsing die je maakt als je eerst naar het westen reist met een snelheid van 27 m/s gedurende 125 s, en dan naar het zuiden met een snelheid van 14 m/s gedurende 66 s?

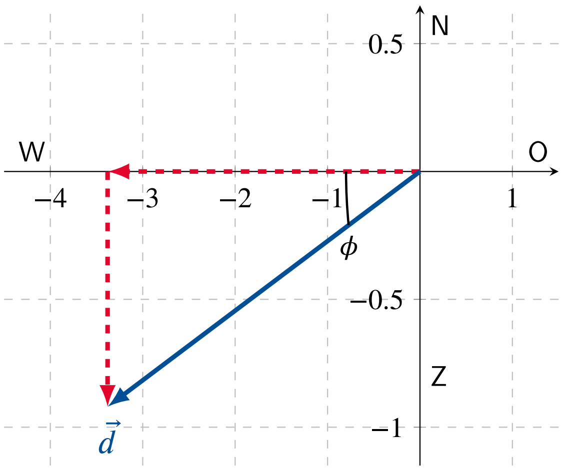
Uitwerking: We beginnen eerst met het berekenen van de afgelegde afstanden. De verplaatsing richting het westen is over een afstand

$$d_1 = 27 \text{ m/s} \cdot 125\,\text{s} = 3.38 \text{ km},$$

en de verplaatsing naar het zuiden is over een afstand

$$d_2 = 14 \text{ m/s} \cdot 66\,\text{s} = 0.92 \text{ km}.$$

Dan kunnen we een schets maken van de verplaatsing, op volgende figuur.



De afstand tot het vertrekpunt is dan $|\vec{d}| = \sqrt{0,92^2 + 3,38^2} \approx 3,5$ km. De hoek ϕ vinden we dan als $\tan\phi = 0,92/3,38$, en dus vinden we $\phi \approx 15,2°$. De richting is dus ongeveer 15° ten zuiden van het westen.

Oefening 3.8.14. Een bal wordt vanuit rust losgelaten vanaf een hoogte van 20 meter.

1. Hoe lang duurt het vooraleer de bal de grond raakt? $t = 2{,}02$ s

2. Wat is de snelheid van de bal net voordat hij de grond raakt? $v = 19{,}8$ m/s

Uitwerking: De beweging is verticaal naar beneden, het gaat om een eenparig versnelde rechtlijnige beweging, met beginsnelheid $v_0 = 0$ m/s en versnelling $g = 9{,}81$ m/s^2. Kiezen we de y-as verticaal met positieve zin naar beneden. 1. We noemen t^* het tijdstip waarop de bal de grond raakt. Op dit tijdstip t^* is $y = 0$:

$$y(t^*) = y_0 + v_{0y} - \tfrac{1}{2}gt^{*2} = 0.$$

Met $y_0 = 20$ m wordt dit:

$$0 = 20 + 0 - \tfrac{1}{2}(9{,}81)t^{*2} \quad \Rightarrow \quad t^{*2} = \frac{40}{9{,}81} \approx 4{,}08,$$

Hieruit volgt dat :

$$t^* \approx 2{,}02 \text{ s}.$$

2. De snelheid neemt lineair toe met de tijd. De eindsnelheid op het tijdstip t^* is gelijk aan:

$$v = v_0 + gt^* = 0 + 9{,}81 \cdot 2{,}02 \approx 19{,}8 \text{ m/s}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.B Standaardoefeningen

De bal raakt de grond dus na ongeveer 2,0 seconden met een snelheid van 19,8 m/s naar beneden.

Oefening 3.8.15. Een hond rent vooruit en achteruit tussen zijn twee baasjes die naar elkaar toe wandelen met elk een snelheid van 1,3 m/s. De hond start met lopen als ze 10 m van elkaar verwijderd zijn en heeft een snelheid van 3,0 m/s. Welke afstand heeft de hond afgelegd als de baasjes bij elkaar komen?

$$d = 11 \text{ m}$$

Uitwerking: We berekenen eerst hoe lang het duurt eer de baasjes elkaar ontmoeten. Aangezien ze dezelfde snelheid hebben, moeten ze elk 5 m afleggen voor ze elkaar ontmoeten. Aan een snelheid van 1,3 m/s doen ze hier 3,8 seconden over:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_b} = \frac{5,0 \text{ m}}{1,3 \text{ m/s}} = 3,8 \text{ s}\,.$$

Gedurende deze 3,8 seconden blijft de hond heen en weer rennen tussen de baasjes aan de snelheid van 3,0 m/s. Hij legt dus een afstand

$$d = v_H \Delta t = (3,0 \text{ m/s}) \cdot (3,8 \text{ s}) = 11 \text{ m}$$

af.

Oefening 3.8.16. Een auto die volgens een rechte baan met een snelheid van 20 m/s rijdt, begint te remmen met een constante versnelling met grootte 4,0 m/s^2.

1. Hoe lang duurt het vooraleer de auto tot stilstand komt? $t = 5{,}0$ s
2. Hoe ver rijdt de auto voordat hij volledig stilstaat? $d = 50$ m

Uitwerking: (a) De tijd wordt gegeven door:

$$v = v_0 + at \quad \Rightarrow \quad 0 = 20 + (-4{,}0)t,$$

dus kan de stoptijd berekend worden:

$$t = \frac{20}{4{,}0} = 5{,}0 \text{ s.}$$

(b) De stopafstand is:

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 = 20 \cdot 5{,}0 + 0{,}5 \cdot (-4{,}0) \cdot (5{,}0^2).$$
$$x = 100 - 50 = 50 \text{ m.}$$

Dus de auto komt na 5,0 seconden tot stilstand en legt daarbij 50 meter af.

Oefening 3.8.17. Een auto rijdt met een constante snelheid van 135 km/u over een autosnelweg. Een politiewagen registreert deze snelheid als de wagen 100 m voorbij de politiewagen is en zet onmiddellijk de achtervolging in. De politiewagen houdt hiervoor een constante versnelling van 2.5 m/s^2 aan. Hoe lang duurt het eer de politiewagen de auto ingehaald heeft? Welke afstand heeft de politiewagen dan afgelegd?

Uitwerking: De auto rijdt met een constante snelheid v_a = 135 km/h = 37.5 m/s en voert een eenparig rechtlijnige beweging uit. Bijgevolg verandert de positie x_a van de auto in de tijd als volgt :

$$x_a(t) = x_0 + v_a t = 100 + v_a t$$

De politiewagen bevindt zich op $t = 0$ s op positie $x_{p0} = 0$ m en vertrekt vanuit stilstand ($v_{p0} = 0$ m/s)

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.B Standaardoefeningen

met een constante versnelling $a_p = 2.5\text{m/s}^2$ (eenparig versnelde rechtlijnige beweging). De positie x_p van de politiewagen verandert in de tijd als volgt:

$$x_p(t) = x_0 + v_{p0}t + \frac{a_p t^2}{2} = \frac{a_p t^2}{2}$$

Stel dat op tijdstip t^* de politiewagen de auto heeft ingehaald. Dan geldt:

$$x_p(t^*) = x_a(t^*)$$

$$\frac{a_p t^{*2}}{2} = 100 + v_p t^*$$

$$1.25t^{*2} = 100 + 37.5t^*$$

$$1.25t^{*2} - 37.5t^* - 100 = 0$$

Deel linker- en rechterlid door 1.25:

$$t^{*2} - 30t^* - 80 = 0$$

Oplossen van deze tweedegraadsvergelijking mbv de discriminant geeft de volgende positieve oplossing:

$$t^* = 32.5 \text{ s}$$

Wat is de positie van de auto en de politiewagen na 32.5 s ?

$$x_p(32.5s) = \frac{a_p t^{*2}}{2} = 2.5\frac{m}{s^2}\frac{(32.5s)^2}{2} = 1317m$$

Na 1.3 km heeft de politiewagen de auto ingehaald.

Oefening 3.8.18. Een projectiel wordt gelanceerd onder een hoek $\theta = 37°$ met een beginsnelheid $v_0 = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Geef de grootte van de snelheid van het projectiel in het hoogste punt van zijn baan. Verklaar je antwoord.

Uitwerking: In het hoogste punt beweegt het projectiel horizontaal. Dit betekent dat onder invloed van de zwaartekracht de y-component van de snelheid in dat punt gelijk wordt aan nul. De x-component van de snelheid daarentegen wordt niet beïnvloed door de zwaartekracht. In afwezigheid van wrijving blijft de x-component van de snelheid tijdens de projectielbeweging constant. Daarom is de grootte van de snelheid van het projectiel in het hoogste punt van de baan gelijk aan $v = v_{0,x} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos(37°) = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Oefening 3.8.19. Een Porsche daagt een Volkswagen uit voor een race van 400 m. Omdat de versnelling van $3,5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ van de Porsche groter is dan de versnelling van $3,0\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, mag de Volkswagen $1,0$ s vroeger vertrekken. Wie wint deze race?

Meerkeuze:

(a) Porche ✓

(b) Volkswagen

Uitwerking: De Porsche komt $0,21$ s vroeger aan dan de Volkswagen. We vinden dit door de bewegingsvergelijkingen van beide auto's op te stellen.

De start ligt op $x = 0$, en ze vertrekken beide vanuit stilstand. De Volkswagen vertrekt op $t = 0$. Dan vinden we dat

$$x_V(t) = \frac{1}{2}\left(3,0\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) t^2 .$$

We vinden dus dat $x_V = 400$ m wanneer $t = \sqrt{800/3}$ s $= 16,33$ s.

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.B Standaardoefeningen

De Porsche vertrekt pas na 1 seconde, en we vinden dus dat

$$x_P(t) = \frac{1}{2}\left(3,5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(t - 1\ \mathrm{s})^2 .$$

Zo vinden we dat $x_P = 400$ m wanneer $t = \left(\sqrt{1600/7} + 1\right)$ s $= 16,12$ s. Dit is 0,21 seconde vroeger dan de Volkswagen.

Oefening 3.8.20. Een bevoorradingsvliegtuig moet een wetenschappelijke expeditie op de Noordpool voorzien van een voedselpakket. Het vliegtuig vliegt 80 m boven de grond aan een snelheid van 100 m/s. Op hoeveel afstand van de landingsplaats moet het pakket uit het vliegtuig geduwd worden?

$$404\ m$$

Uitwerking: Het moment dat het pakket gelost wordt komt overeen met $t_0 = 0$, en zijn positie met $x_0 = 0, y_0 = 80$ m. We kunnen de beweging in de horizontale en verticale richting ontkoppelen: We zoeken eerst hoe lang het duurt voor het pakket om 80 meter naar beneden te vallen. De bewegingsvergelijking is

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(-9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)t^2 + 80\ \mathrm{m},$$

en dus vinden we $y(t^*) = 0$ voor $t^* = \sqrt{\frac{160}{9,81}}$ s $= 4,04$ s (merk op dat dit tijdstip positief moet zijn, omdat het na $t = 0$ moet komen, wanneer het pakketje gelost werd).

Voor de beweging in de x-richting vinden we, aangezien het vliegtuig een snelheid heeft van 100 m/s, dat

$$x(t) = 100\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t .$$

Zo vinden we dat $x(t^*) = 404$ m.

Oefening 3.8.21. Een wagentje op afstandsbediening rijdt een parcours dat beschreven wordt door $x = \frac{1}{2} \cdot t^3 - 2 \cdot t^2$ en $y = \frac{1}{2} \cdot t^2 - 2t$ waarbij x en y uitgedrukt worden in m en t in s. Wat is de richting van de beweging na 4 s? Geef de richting aan met behulp van een hoek met de positieve x-as.

$$14\ °$$

Uitwerking: De richting van de beweging is de richting van de snelheidsvector. Als we de positie van het wagentje noteren met $\vec{x} = (x(t), y(t))$, kunnen we de snelheidsvector berekenen als

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt} = \left(\frac{3}{2}t^2 - 4t, t - 2\right) .$$

Na 4 seconden is de snelheidsvector dus gelijk aan $v(4) = (8, 2)$. De richting van de vector kan dan worden bepaald met de formule $\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$, en zo vinden we dat $\tan\theta = 0,25$, zodat $\theta = 14°$.

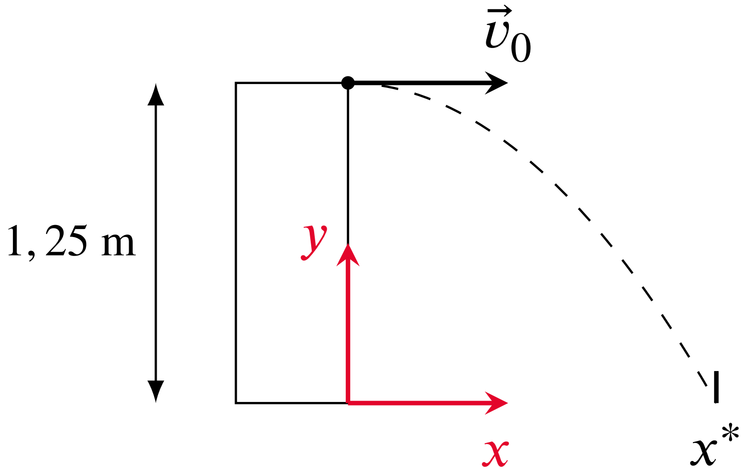
Oefening 3.8.22. Een jongen gooit een bal horizontaal weg met een snelheid $v_0 = 1,3$ m/s, vanaf een hoogte van $1,25$ m boven de grond. Bepaal de x- en y-positie op de tijdstippen $t = 0,25$ s en $t = 0,5$ s.

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.B Standaardoefeningen

1. Hoe lang duurt het voor de bal landt? $t^* = \sqrt{\frac{1,25 \cdot 2}{g}} \approx 0,505$ s

2. Waar landt de bal? $x^* = 1,3 \cdot \sqrt{\frac{1,25 \cdot 2}{g}} \approx 0,66$ m



Uitwerking:

Voor de x-richting geldt:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0,x}t \\ &= 0 + v_0 t \\ &= v_0 t \\ &= 1,3t \end{aligned}$$

Voor de y-richting geldt:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{0,y}t - \frac{g}{2}t^2 \qquad (g = 9,81) \\ &= 1,25 + 0 \cdot t - \frac{g}{2}t^2 \\ &= 1,25 - \frac{g}{2}t^2 \end{aligned}$$

We vinden dus:

$$\begin{aligned} x(0,25) &\approx 0,33 \text{ m} \\ x(0,5) &= 0,65 \text{ m} \\ y(0,25) &\approx 0,94 \text{ m} \\ y(0,5) &\approx 0,024 \text{ m} \end{aligned}$$

De bal landt wanneer $y = 0$. Het tijdstip t^* waarop dat gebeurt moet dus voldoen aan:

$$0 = 1,25 - \frac{g}{2}(t^*)^2 \quad \Rightarrow \quad t^* = \pm\sqrt{\frac{1,25 \cdot 2}{g}}$$

Vermits we de beweging hebben laten starten op $t_0 = 0$ s, is er nog een bijkomende voorwaarde voor t^*, namelijk $t^* \geq 0$. We kunnen dus de negatieve oplossing verwerpen.

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.B Standaardoefeningen

De bal landt dus op tijdstip:

$$\begin{aligned} t^* &= +\sqrt{\frac{1,25 \cdot 2}{g}} \\ &\approx 0,505 \text{ s} \end{aligned}$$

De x-positie bij landing wordt gegeven door:

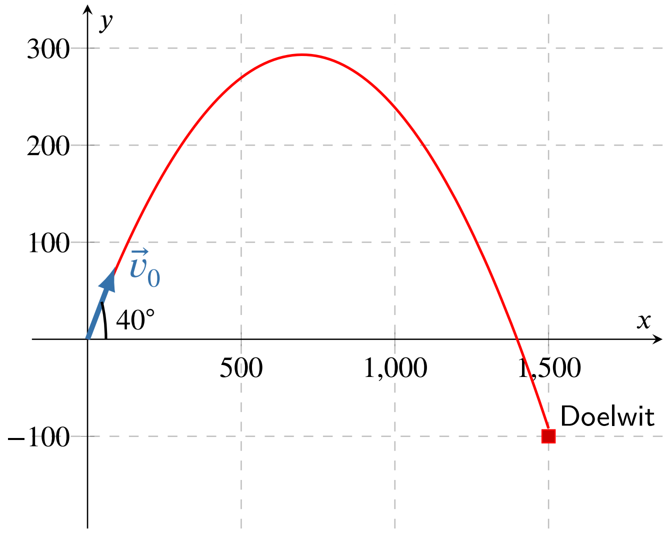
$$\begin{aligned} x^* &= x(t^*) \\ &= 1,3 \cdot 0,505 \text{ m} \\ &\approx 0,66 \text{ m} \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.C Gevorderde oefeningen

Oefening 3.8.23. Een kanonskogel wordt onder een hoek van 40° afgeschoten. Als de kogel een doel moet treffen gelegen op 1500 m afstand, in een 100 m lager gelegen vallei, hoe groot moet dan de beginsnelheid van de kogel zijn? Verwaarloos de luchtweerstand.

Uitwerking: We schetsen het probleem:



We schrijven de bewegingsvergelijkingen op voor de kanonskogel:

$$x(t) = v_0 \cos 40° \cdot t\,,$$
$$y(t) = v_0 \sin 40° \cdot t - \frac{9,81}{2} t^2\,.$$

Noteer de tijd waarop de kogel inslaat op het doel met t_D. Dan hebben we de twee voorwaarden

$$1500 = v_0 \cos 40° \cdot t_D\,,$$
$$-100 = v_0 \sin 40° \cdot t_D - \frac{9,81}{2} t_D^2\,.$$

Uit de eerste halen we t_D, en die vullen we in in de tweede:

$$t_D = \frac{1500}{v_0 \cos 40°}\,,$$
$$-100 = 1500\ \tan 40° - \frac{9,81}{2}\left(\frac{1500}{v_0 \cos 40°}\right)^2\,.$$

Deze laatste vergelijking lossen we dan op naar v_0. We zonderen eerst v_0 af zodat we vinden dat

$$\frac{-100 - 1500\ \tan 40°}{-\frac{9,81}{2} \cdot \left(\frac{1500}{\cos 40°}\right)^2} = \left(\frac{1}{v_0}\right)^2$$

We schrappen de mintekens in het linkerlid tegen elkaar weg en keren het linker- en rechterlid om:

$$\frac{\frac{9,81}{2} \cdot \left(\frac{1500}{\cos 40°}\right)^2}{100 + 1500\ \tan 40°} = v_0^2$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.C Gevorderde oefeningen

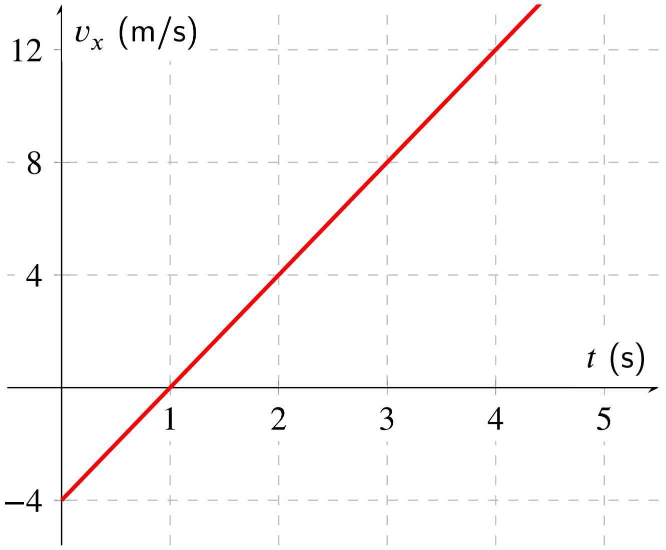
We rekenen het linkerlid uit en bekomen dat

$$v_0^2 \approx 1,38 \cdot 10^4 \text{ (m/s)}^2.$$

Aangezien we een positieve snelheid willen, nemen we hier de positieve wortel van, en zo vinden we dat

$$v_0 \approx 118 \text{ m/s}.$$

Oefening 3.8.24. Een deeltje start een ééndimensionale beweging vanop positie $x_0 = 10$ m op tijdstip $t_0 = 0$ s en beweegt met een snelheid die weergegeven is op de figuur.



1. Teken een mogelijke $x(t)$-grafiek voor dit deeltje.

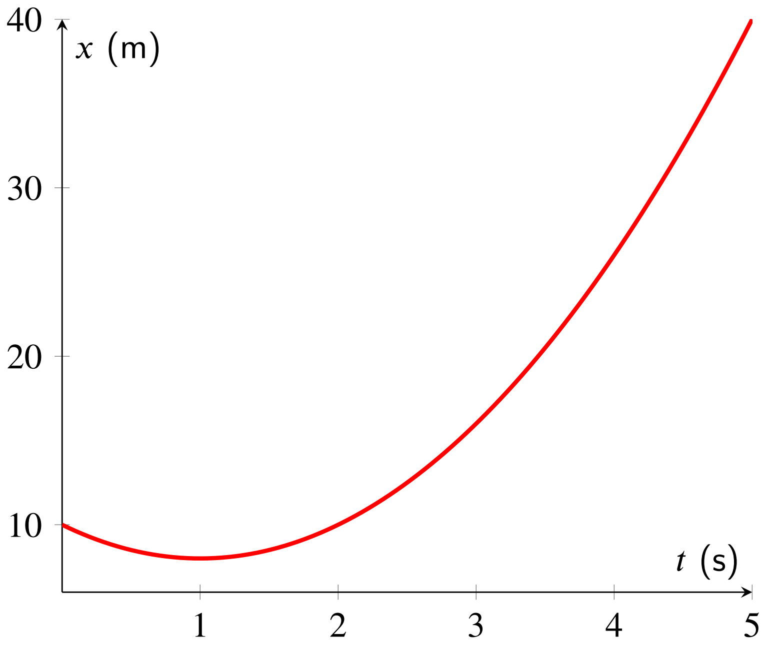
Uitwerking: We zoeken eerst een voorschrift voor de snelheid in functie van de tijd. Het nulpunt is $t = 1$, en het snijpunt met de verticale as is $v_x = -4$. Zo vinden we dat $v_x(t) = 4t - 4$. We weten dat $v_x = \dfrac{dx}{dt}$, en zoeken hieruit $x(t)$. Je zou dit enerzijds kunnen oplossen met integratie, en anders door in te zien dat de afgeleide van de functie $f(t) = at^2 + bt + c$ gegeven wordt door $f'(t) = 2at + b$. Door dit te vergelijken vinden we dat $x(t) = 2t^2 - 4t + c$, waarbij we het getal c niet onmiddelijk weten. We weten echter dat $x_0 = 10$ op tijdstip $t = 0$, en door dit in te vullen vinden we $10 = x_0 = x(0) = c$. Dus in totaal vinden we dat

$$x(t) = 2t^2 - 4t + 10.$$

We kunnen deze grafiek tekenen:

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.C Gevorderde oefeningen



Figuur 29 – De $x(t)$-grafiek.

We zien dus dat het deeltje na 1 seconde verandert van richting.

2. Heeft dit deeltje een keerpunt in z'n beweging? Zo ja, op welk tijdstip? Ja, het deeltje keert om na 1 seconde, aangezien d

3. Wat is de positie van het deeltje na 4 s? 26 m

Uitwerking: Dit kunnen de berekenen door $t = 4$ in te vullen in het voorschrift $x(t)$ dat we hebben bepaald in de eerste vraag. Een andere optie is de oppervlakte onder de grafiek van v_x op te tellen bij de beginpositie. Enerzijds hebben we het stukje tussen 0 en 1 seconde: De oppervlakte van deze driehoek is (1 s) · (−4 m/s) / 2 = −2 m. Het andere stuk geeft (3 s) · (12 m/s) / 2 = 18 m. In totaal vinden we dan $x(4) = 10$ m $- 2$ m $+ 18$ m $= 26$ m.

CC BY-NC-SA 4.0

3.8.D Oefeningen Usolv-it

Oefening 3.8.25. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over kinematica via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Intro dynamica

Het vorige hoofdstuk handelde over kinematica waarin de beweging van objecten wiskundig beschreven wordt zonder de oorzaak van de beweging in acht te nemen. Bij de dynamica wordt deze oorzaak wel in de beschrijving opgenomen.

In dit hoofdstuk worden krachten en de gevolgen ervan op de bewegingstoestand bestudeerd. Wat veroorzaakt een beweging of een verandering van beweging? De wetten van Newton zullen een belangrijke rol spelen in het antwoord op deze vraag. We leren krachtendiagramma's opstellen. Tenslotte komt ook de dynamica van de cirkelvormige beweging van een puntmassa aan bod.

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Kracht

Om een doos over een ruwe vloer voort te duwen, moet je een kracht op de doos uitoefenen die de wrijvingskracht met de vloer compenseert. Om een boek in je hand te kunnen houden, moet je een opwaarts gerichte kracht uitoefenen die de neerwaarts gerichte zwaartekracht compenseert.

Definitie 4.2.1. Een kracht is een vectoriële grootheid gekenmerkt door een grootte, richting, zin en aangrijpingspunt. Ze wordt genoteerd door $\vec{F}$.

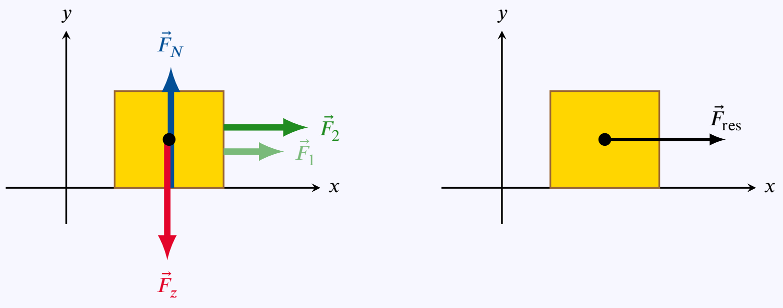
De grootte van de kracht noteren we met F. De eenheid van de grootte van de kracht is newton (N).

Er kunnen meerdere krachten tegelijk inwerken op een voorwerp.

Definitie 4.2.2. De **nettokracht of resulterende kracht** $\vec{F}_{\text{res}}$ definiëren we als de **vectorsom** van alle krachten uitgeoefend op dat voorwerp:

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots$$

Voorbeeld 4.2.1. Een vader en zijn zoon duwen samen een doos over de vloer verder. Vader en zoon duwen elk met een horizontale kracht met respectieve groottes $F_1 = 23$ N en $F_2 = 17$ N (zie figuur 30). Bereken de nettokracht op de doos.



Figuur 30 – De resulterende kracht of nettokracht.

Antwoord : De krachten werken allebei op de doos, alsook de zwaartekracht $\vec{F}_z$ en de normaalkracht $\vec{F}_N$ (zie verder bij 4.5 'Soorten krachten'), dus is $\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_z + \vec{F}_N$. De zwaartekracht en normaalkracht werken in de y-richting en compenseren elkaar. De krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ werken beide in de x-richting (één-dimensionaal) zodat $F_{1,x} = F_1 = 23$N en $F_{2,x} = F_2 = 17$ N. Dus is $F_{res,x} = F_{res} = 40$ N. Ze staat voorwaarts gericht en vergroot daardoor de grootte van de snelheidsvector. In vectoriële notatie wordt dit: $\vec{F}_{res} = 40\,\vec{e}_x$. Hierbij is $\vec{e}_x$ een eenheidsvector in de x-richting.

Voorbeeld 4.2.2. De beweging van de maan rond de aarde kan benaderd worden als een eenparige cirkelbeweging. De enige kracht op de maan is de aantrekkende gravitatiekracht F_{grav} van de aarde. We vinden dus voor de grootte van de resulterende kracht :

$$F_{res} = F_g = G_0 \cdot \frac{m_m \cdot m_a}{d_{am}^2}$$

met m_m en m_a respectievelijk de massa van de maan en de aarde, en d_{am} de afstand aarde-maan.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Soorten krachten

4.3.1 Trek- of duwkracht

De eenvoudigst denkbare kracht is een trek- of duwkracht op een voorwerp. Die kan geleverd worden door een persoon (**spierkracht**) of door een machine (**motorkracht**). Je zou zelfs kunnen stellen dat eigenlijk alle soorten krachten (zie volgende paragrafen) in zekere zin trek- of duwkrachten zijn. Wij zullen in deze cursus echter enkel de letterlijke duw- of trekkrachten met deze naam aanduiden.

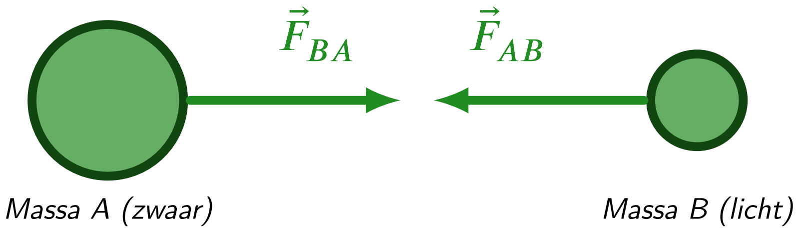
4.3.2 Gravitatiekracht, zwaartekracht

Twee voorwerpen met respectieve massa's m_1 en m_2, op een bepaalde afstand r van elkaar, oefenen op elkaar een **gravitatatiekracht** uit waarvan de grootte evenredig is met elk van de massa's en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tussen deze massa's.

$$F_g = G_0 \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

waarin G_0 de universele gravitatieconstante voorstelt en gelijk is aan $6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$.

De massa's worden hier als puntmassa's verondersteld. Deze krachtwerking is aantrekkend en gericht volgens de verbindingslijn tussen de punten.



Figuur 31 – Gravitatiekracht werkt van een puntmassa A op een naburige puntmassa B, en omgekeerd.

Met de gravitatiekracht kan niet alleen de beweging van de hemellichamen verklaard worden, maar ook van de voorwerpen in de buurt van het oppervlak van een hemellichaam, bijvoorbeeld de Aarde. De **zwaartekracht**, die elk voorwerp in de buurt van het aardoppervlak ervaart, is eigenlijk de gravitatiekracht die de aarde op elk voorwerp uitoefent. De grootte van de zwaartekracht op Aarde op een massa m wordt gegeven door

$$F_z = m \cdot g$$

Hierin is g gelijk aan de zwaarteveldsterkte: $9,81 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$. Lokaal zijn hierop wel afwijkingen mogelijk. Door de zwaartekracht gelijk te stellen aan de gravitatiekracht kan je eenvoudig zien dat

$$g = G_0 \cdot \frac{m_{\text{aarde}}}{r^2} = G_0 \cdot \frac{m_{\text{aarde}}}{(r_a + h)^2}$$

waarin r_a staat voor de straal van de aarde en h voor de hoogte boven het aardoppervlak. Vermits deze waarden kunnen verschillen van plaatst tot plaats, is g niet overal even groot.

4.3.3 Touwkracht

Op een voorwerp dat aan het uiteinde van een gespannen touw bevestigd is, oefent het touw een 'touwkracht' $\vec{F}_t$ of 'spankracht' $\vec{F}_s$. Die kracht is steeds trekkend, nooit duwend, of dus : ze is steeds gericht naar de kant van het touw zelf. Zodra het touw slap hangt, is de spankracht ervan nul.

Elk touw wordt bovendien gekenmerkt door een maximale waarde $F_{s,max}$ van haar spankracht, of dus : de waarde waarbij het touw breekt.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3.4 Veerkracht

Op een voorwerp dat aan het uiteinde van een veer bevestigd is, oefent die veer een veerkracht $\vec{F}_v$. Die kracht is steeds gericht naar het zogenaamde 'evenwichtspunt', waar de veer haar natuurlijke lengte heeft. Of dus : als de veer ingedrukt is, is de veerkracht gericht naar een verlenging van de veer, en als de veer uitgerekt is, is de veerkracht gericht naar een verkorting van de veer.

De grootte van de veerkracht is gelijk aan

$$F_v = k \cdot \Delta l$$

met k de veerconstante (die groot is bij een stijve veer, en klein bij een slappe veer), en Δl de uitrekking óf induwing van de veer. Omwille van de gelijke grootte van de kracht bij uitrekking tegenover induwing, spreken we ook wel van 'opspanning' om beide tegelijk aan te duiden. We hebben dus een recht evenredig verband tussen de veerkracht en de opspanning van de veer.

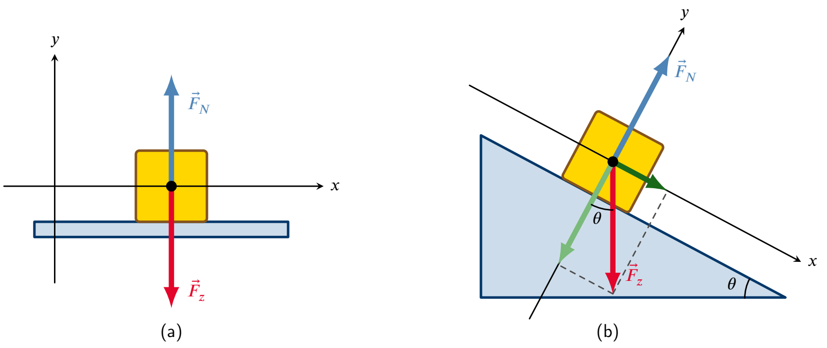
Men zegt ook wel samenvattend dat de veerkracht altijd een 'terugroepkracht' is : ze 'roept' het voorwerp altijd weer terug naar haar eigen evenwichtspunt. En omdat ze daarbij ook nog eens des te harder 'roept' naarmate het voorwerp verder verwijderd is van het evenwichtspunt, is het een voorbeeld van een zogenaamde 'elastische kracht'.

We zullen de veerkracht uitgebreider bespreken in het hoofdstuk over trillingen en golven.

> **Opmerking 4.3.1.** Je zou ook de touwkracht (zie eerder) kunnen zien als een veerkracht, als je het touw beschouwt als (een heel klein beetje) uitgerekt, zoals een veer. Het geval van induwing kan bij een touw dan niet gebeuren. Dan wordt de touwkracht nul aangezien het touw dan slap gaat hangen.

4.3.5 Normaalkracht

Veronderstel een boek dat in rust op tafel ligt. De zwaartekracht werkt in op het boek, toch versnelt het boek niet naar beneden. Er moet dus volgens de tweede wet van Newton nog een kracht op het boek werken, die de zwaartekracht compenseert. Deze kracht wordt uitgeoefend door de tafel op het boek. Ze staat loodrecht ('normaal') op het oppervlak en wordt daarom de normaalkracht genoemd. We gebruiken het symbool $\vec{F}_N$.



Figuur 32 – Normaalkracht op een voorwerp uitgeoefend door (a) een horizontaal oppervlak en (b) een schuin oppervlak. Op een schuin oppervlak zien we dat de grootte van de normaalkracht niet meer gelijk is aan die van de zwaartekracht op het voorwerp.

De grootte van de normaalkracht wordt bepaald door te eisen dat het voorwerp op het oppervlak moet blijven.

Voor het boek op het horizontaal oppervlak (figuur 32(a)) is de normaalkracht in grootte gelijk aan de zwaartekracht op het voorwerp ($F_N = m \cdot g$) om op het horizontaal oppervlak in rust te blijven.

CC BY-NC-SA 4.0

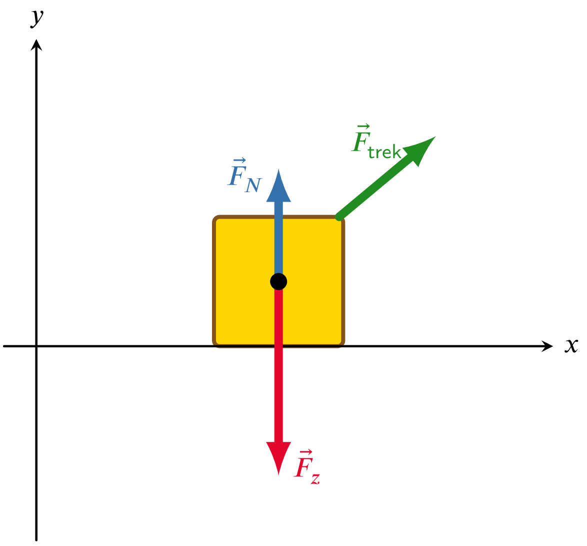
4.3 Soorten krachten

Deze gelijkheid geldt echter niet altijd. Dit is duidelijk te zien in figuur 32(b) waar een voorwerp op een schuin oppervlak ligt. Na projectie van de zwaartekracht $\vec{F}_z$ op de gekozen x- en y-as, is het duidelijk dat

$$F_N = \left|F_{z,y}\right| = mg \cdot \cos\theta$$

wat duidelijk kleiner is dan mg. Dit volgt uit de eis dat de krachten in de y-richting elkaar moeten compenseren om geen versnelling in de y-richting te krijgen, en er zo voor te zorgen dat het voorwerp inderdaad op het schuin oppervlak blijft (in de y-richting).

Merk op dat de x-component van de zwaartekracht $F_{z,x}$ het voorwerp naar beneden doet glijden (als de helling glad verondersteld is).



Figuur 33 – Normaalkracht door een horizontaal oppervlak op een voorwerp uitgeoefend. Op het voorwerp werkt nog een bijkomende uitwendige trekkracht $\vec{F}_{\text{trek}}$. In dit geval is de normaalkracht in grootte dus niet gelijk aan de zwaartekracht op het voorwerp.

In figuur 33 wordt een tweede situatie geschetst waar op een horizontaal oppervlak de normaalkracht in grootte toch niet gelijk is aan de zwaartekracht op het voorwerp. Een voorwerp ligt op een horizontaal oppervlak en wordt onder een bepaalde hoek verdergetrokken door een uitwendige kracht $\vec{F}_{\text{trek}}$. Het voorwerp komt daarbij niet los van het oppervlak. Bijgevolg moeten de krachten (volgens tweede wet van Newton) elkaar in de y-richting compenseren:

$$\begin{aligned} F_{N,y} + F_{z,y} + F_{\text{trek},y} &= m \cdot a_y \\ F_N - F_z + F_{\text{trek},y} &= 0 \\ F_N &= F_z - F_{\text{trek},y} \\ &= mg - F_{\text{trek},y} \end{aligned}$$

We zien dus dat ook in deze situatie de normaalkracht kleiner is dan de zwaartekracht op het voorwerp. Ditmaal is de oorzaak niet de helling van het oppervlak, maar een bijkomende krachtcomponent (hier van de trekkracht) in de normale richting. Het is echter niet moeilijk om in te zien dat, als de trekkracht schuin neerwaarts in plaats van schuin opwaarts gericht was, de normaalkracht groter zou worden dan de normaalkracht. Onthou dus in het algemeen dat **de normaalkracht niet altijd tegengesteld gericht staat aan de zwaartekracht, en naargelang de situatie kleiner, gelijk of groter dan de zwaartekracht kan zijn**.

In de x-richting zorgt F_x voor een versnelling $a_x = \dfrac{F_x}{m}$ van het voorwerp langs het horizontale oppervlak.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3.6 Dynamische wrijvingskracht

Wanneer een voorwerp over een ruw oppervlak schuift, oefent het oppervlak een dynamische wrijvingskracht $\vec{F}_w$ uit op het voorwerp, evenwijdig aan het oppervlak gelegen en achterwaarts gericht. Deze grootte van deze wrijvingskracht is evenredig met de grootte van de normaalkracht op het voorwerp en met de dynamische (of 'kinetische') wrijvingscoëfficiënt μ_k, die afhangt van het materiaal van het oppervlak en het materiaal van het voorwerp.

$$F_w = \mu_k \cdot F_N$$

Let op dat je deze formule niet vectorieel noteert! De dynamische wrijvingskracht staat langs het oppervlak gericht, en de normaalkracht loodrecht erop.

4.3.7 Statische wrijvingskracht

Wanneer op een ruw oppervlak een voorwerp weliswaar getrokken of geduwd wordt, maar niet hard genoeg om het voorwerp in beweging te brengen, dan oefent het oppervlak een statische wrijvingskracht $\vec{F}_{w,s}$ uit op het voorwerp. Deze is evenwijdig aan het oppervlak gelegen, en zodanig gericht, dat de resulterende krachtcomponent langs het oppervlak, nul blijft. Naargelang het materiaal van het oppervlak en het voorwerp, bestaat er een statische wrijvingscoëfficiënt μ_s waarvoor geldt dat, als de statische wrijvingskracht groter wordt dan

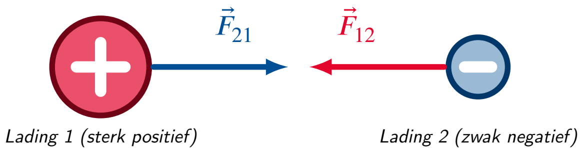
$$F_{w,s,max} = \mu_s \cdot F_N$$

, het voorwerp toch in beweging zal komen en de statische wrijvingskracht dus zal veranderen naar kinetische, zoals hierboven gedefinieerd.

4.3.8 Elektrische en magnetische kracht

De elektrische en de magnetische kracht (of samen : elektromagnetische kracht $\vec{F}_{em}$) werken in sommige omstandigheden in op elektrisch geladen voorwerpen.

We zullen deze elektromagnetische krachten uitgebreider bespreken in de hoofdstukken over Elektrostatica, Elektrodynamica en Magnetisme.



Figuur 34 – Een negatieve lading 2 trekt een positieve lading 1 aan, en omgekeerd.

4.3.9 Gewicht

Het gewicht $\vec{G}_w$ van een voorwerp dat nabij het aardoppervlak op een ondersteunend oppervlak rust, is de kracht die het voorwerp op z'n ondersteuning uitoefent. Volgens de derde wet van Newton oefent de steun een even grote tegengestelde kracht uit op het voorwerp, en deze kennen we reeds : de normaalkracht $\vec{F}_N$

$$\vec{G}_w = -\vec{F}_N$$

Dat de normaalkracht van de ondersteuning op het voorwerp, en het gewicht van het voorwerp op de ondersteuning, elkaars actie- en reactiekracht zijn, houdt in dat ze op een verschillend voorwerp aangrijpen, tegengesteld gericht zijn, en noodzakelijk even groot zijn. Wetende dat de normaalkracht naargelang de situatie kleiner, even groot of groter kan zijn dan de zwaartekracht, kunnen we nu hetzelfde concluderen voor het gewicht van een voorwerp.

Het gewicht wordt, als even grote kracht als de normaalkracht, nul bij normaalkracht nul. 'Gewichtloosheid' is normaalkrachtloosheid, niet zwaartekrachtloosheid!

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Soorten krachten

Het gewicht $\vec{G}_w$ grijpt zoals gezegd niet op het voorwerp maar op de ondersteuning aan. Je kan dus stellen dat, in de fysica, een voorwerp niet zijn eigen gewicht voelt. Het is de ondersteuning die het gewicht van het voorwerp voelt. Het voorwerp voelt wel zijn eigen zwaartekracht.

Opmerking 4.3.2. In het dagelijkse leven worden de woorden 'gewicht' en 'massa' als synoniemen gebruikt, maar in de fysica is dat helemaal niet zo. Het **gewicht** is, net zoals de zwaartekracht, een kracht, uitgedrukt in newton, terwijl **massa** uitgedrukt wordt in kilogram. Maar bovenal is er in het algemene geval geen verband tussen de massa en de grootte van de normaalkracht. Dat is er wel tussen de massa en de grootte van de **zwaartekracht**.

Definitie 4.3.1. De **massa** m van een voorwerp is een maat voor de hoeveelheid materie en wordt uitgedrukt in kg.

De **zwaartekracht** $\vec{F}_z$ op een voorwerp is de kracht waarmee de aarde het voorwerp naar zich toetrekt. Ze is in grootte recht evenredig met de massa m van het voorwerp.

Het **gewicht** $\vec{G}_w$ van een voorwerp is de kracht die het voorwerp uitoefent op zijn steun en wordt uitgedrukt in newton. Gewicht grijpt niet op het voorwerp aan maar op de steun, en is niet steeds even groot als de zwaartekracht op het voorwerp.

De **normaalkracht** $\vec{F}_N$ is de kracht van de steun op het voorwerp, en is even groot als, maar tegengesteld gericht aan, het gewicht $\vec{G}_w$ van het voorwerp op de steun.

Voorbeeld 4.3.1. Voor een voorwerp dat zich in rust bevindt op een horizontaal vlak, en waarop geen andere krachten inwerken, is de grootte van het gewicht gelijk aan:

$$\begin{aligned} G_w &= F_N \\ &= F_z \\ &= m \cdot g \end{aligned}$$

waarin g gelijk is aan de zwaarteveldsterkte. Het gewicht is dan even groot als de zwaartekracht. Maar je kunt inzien dat dit niet algemeen geldt.

CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Krachtendiagramma's

Bij het oplossen van dynamische problemen met de **tweede wet van Newton**, is het belangrijk om te starten met een eenvoudige schets waarin elke uitwendige kracht op het betreffende object wordt getekend. Deze schets wordt een **krachtendiagramma** genoemd. Als we ons beperken tot translatiebewegingen ('schuivende' bewegingen zonder rotatie) mogen we het object beschouwen als een puntmassa waarop alle krachten inwerken. We kiezen een referentiestelsel en projecteren elke kracht op de x- en y-as (projectie van een vector op een as). Zo kan de tweede wet van Newton toegepast worden in elke coördinaatrichting afzonderlijk. We vatten dit samen in onderstaand stappenplan.

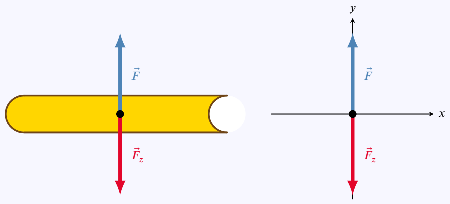
(a) Vervang het object door een puntmassa waarop alle krachten inwerken, en teken alle krachten op de puntmassa.

(b) Kies een passend x-y assenstelsel (maak een eenvoudige keuze, bijvoorbeeld de x-as volgens de bewegingsrichting).

(c) Projecteer de krachten op de x- en y-as.

(d) Pas de tweede wet van Newton toe in elke coördinaatrichting en analyseer zo de beweging in elke richting apart.

Voorbeeld 4.4.1. Stel dat je een boek vasthoudt in je hand. Wat is de grootte van de opwaartse kracht van je hand op het boek zodat dit in rust blijft? Het corresponderende krachtendiagramma wordt getoond in figuur 35. Het boek wordt voorgesteld als een puntmassa waarop de krachten inwerken. De twee krachten die inwerken op het boek zijn enerzijds de zwaartekracht $\vec{F}_z$ en anderzijds de opwaartse kracht $\vec{F}$ van je hand op het boek. Merk op dat in een krachtendiagramma enkel de krachten getekend worden die op het object (in dit geval het boek) inwerken, en niet de bijhorende reactiekrachten, die immers op andere systemen inwerken : de reactiekracht van de zwaartekracht grijpt aan in het middelpunt van de aarde, en de reactiekracht van de normaalkracht grijpt aan op de hand.



Figuur 35 – Het krachtendiagramma bestaande uit twee uitwendige krachten op het boek.

Vervolgens kiezen we een x-y assenstelsel zodat we de componenten van de krachten kunnen bepalen. In dit geval zijn alle krachten verticaal, zo wordt de tweede wet van Newton in de opwaarts gekozen y-richting:

$$\sum_i F_{i,y} = F - F_z = m \cdot a_y.$$

Omdat het boek in rust blijft, is de versnelling in de y-richting 0, dus is

$$F - F_z = m \cdot a_y = 0,$$

of

$$F = F_z.$$

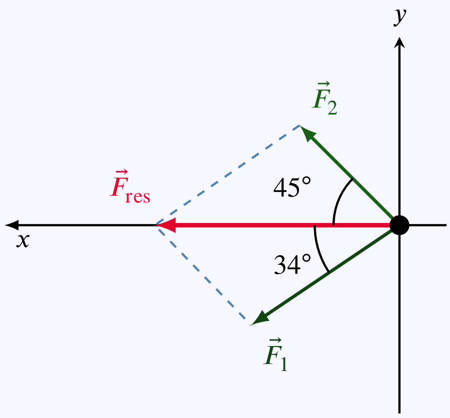
Zoals verwacht is de opwaartse kracht van je hand hier dus even groot als de zwaartekracht die op het boek inwerkt.

CC BY-NC-SA 4.0

Voorbeeld 4.4.2. Twee landbouwers trekken een kar met twee touwen voort. Een landbouwer trekt met een kracht van 130 N onder een hoek van 34° met de voortbewegingsrichting van de kar. De tweede landbouwer trekt onder een hoek van 45°. Met welke kracht moet de tweede landbouwer trekken opdat de nettokracht uitgeoefend door de twee personen in de voorwaartse bewegingsrichting van de kar staat?

Via het stappenplan proberen we deze oefening op te lossen.

(a) Vervang het object door een puntmassa waarop alle krachten inwerken, en teken alle krachten op het object (zie figuur). In de tekening hebben we ons beperkt tot alle krachten in het x-y vlak. De zwaartekracht en normaalkracht heffen mekaar op in de z-richting.



Figuur 36 – Krachtendiagramma kar.

(b) Kies een passend x-y assenstelsel (maak een eenvoudige keuze). Hier kiezen we de x-as met richting en zin van de beweging. (zie figuur).

(c) Projecteer de krachten op de x- en y-as.

$$\begin{aligned} F_{1,x} &= F_1 \cdot \cos(34°) \\ F_{2,x} &= F_2 \cdot \cos(45°) \\ F_{1,y} &= F_1 \cdot \sin(34°) \\ F_{2,y} &= -F_2 \cdot \sin(45°) \end{aligned}$$

(d) Pas de tweede wet van Newton toe in elke coördinaatrichting en analyseer zo de beweging in elke richting apart.

$$F_{1,x} + F_{2,x} = m \cdot a_x \qquad (1)$$
$$F_{1,y} + F_{2,y} = m \cdot a_y \qquad (2)$$

(e) Wat wordt er precies gevraagd? De resulterende kracht moet volgens de x-as liggen. Dit wil

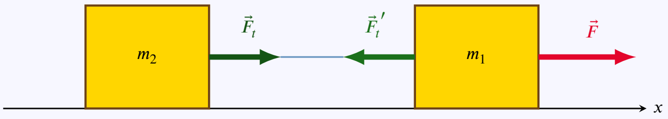
CC BY-NC-SA 4.0

zeggen dat de resulterende kracht geen y-component heeft. Vergelijking (2) wordt dan:

$$\begin{aligned} F_{1,y} + F_{2,y} &= m \cdot a_y = 0 \\ -F_1 \cdot \sin(34°) + F_2 \cdot \sin(45°) &= 0 \\ F_1 \cdot \sin(34°) &= F_2 \cdot \sin(45°) \\ F_2 &= \frac{F_2 \cdot \sin(34°)}{\sin(45°)} \\ &= \frac{130 \text{ N} \cdot \sin(34°)}{\sin(45°)} \\ &= 103 \text{ N} \end{aligned}$$

Voorbeeld 4.4.3 (Gekoppelde opbjecten)**.** We passen de tweede wet van Newton toe op objecten die met mekaar verbonden zijn. In dit voorbeeld wordt met een kracht $\vec{F}$ getrokken aan twee dozen die verbonden zijn door een massaloos touw en die schuiven over een wrijvingsloos oppervlak. Zo ontstaat er een spanning in het touw en bewegen de dozen verder met dezelfde versnelling $\vec{a}$. Stel dat de massa's m_1 en m_2 van de dozen gekend zijn.

Bepaal dan de spankracht in het touw en de versnelling van de dozen. We maken weer gebruik van het stappenplan.



Figuur 37 – Twee dozen verbonden door een massaloos touw worden voortgetrokken. Zo krijgen de twee dozen dezelfde versnelling.

(a) Vervang de twee dozen door twee puntmassa's waarop de krachten inwerken (zie figuur). Op doos 1 met massa m_1 werken twee krachten: de trekkracht $\vec{F}$ naar rechts en de spankracht $\vec{F}_t'$ naar links. Op doos 2 met massa m_2 werkt slechts één kracht, nl. de spankracht $\vec{F}_t$ naar rechts toe.

(b) Kies een passend x-y assenstelsel (maak een eenvoudige keuze). Hier kiezen we de x-as in de richting van de beweging, naar rechts dus.

(c) Projecteer de krachten op de x- en y-as. Vermits alle krachten horizontaal zijn, zijn alle x-projecties even groot als de krachten zelf.

(d) Pas de tweede wet van Newton toe voor elk object. We dienen hier enkel de x-richting te bekijken.

Doos 1: $F - F_t' = m_1 \cdot a_1 = m_1 \cdot a$ (1)
Doos 2: $F_t = m_2 \cdot a_2 = m_2 \cdot a$ (2)

Merk hierbij op dat beide dozen dezelfde versnelling krijgen, dus $a_1 = a_2 = a$. Wiskundig gezien is dit een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met drie onbekenden F_t, F_t' en a, wat dus niet oplosbaar lijkt. Maar omdat voor de spankrachten geldt dat ze afkomstig zijn van hetzeflde touw en dus even groot zijn : $F_t = F_t'$, blijven er slechts twee onbekenden over en is dit stelsel oplosbaar met behulp van substitutie of combinatie. Tellen we beide vergelijkingen op dan bekomen we:

$$F = (m_1 + m_2) \cdot a$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

CC BY-NC-SA 4.0

Wanneer we deze laatste uitdrukking voor a substitueren in vergelijking (2) bekomen we:

$$T = m_2 \cdot a = \frac{m_2 \cdot F}{m_1 + m_2}$$

Deze uitdrukking voor a kunnen we eigenlijk ook sneller vinden als we de twee dozen als één geheel bekijken met massa $m_1 + m_2$, waarop een uitwendige kracht $\vec{F}$ werkt. De spankrachten in het touw worden dan inwendige krachten die mekaar compenseren en dus geen rol spelen in de tweede wet van Newton. Nadeel is dan natuurlijk dat we voor deze spankrachten geen uitdrukking kunnen vinden.

CC BY-NC-SA 4.0

4.5 De wetten van Newton

4.5.1 Eerste wet van Newton - traagheidswet

Gedurende meer dan 15 eeuwen dacht men zoals Aristoteles dat een voorwerp maar in beweging kan blijven als er een kracht op wordt uitgeoefend. Newton (1642-1727) toonde aan dat dat niet klopt: een kracht zorgt niet voor beweging, een kracht kan enkel voor een *verandering* van een beweging zorgen. Een voorwerp kan dus wel degelijk bewegen zonder dat er een resulterende kracht op werkt!

Eigenschap 4.5.1 (EERSTE WET VAN NEWTON - TRAAGHEIDSWET)**.**
Als er op een voorwerp geen resulterende kracht wordt uitgeoefend, behoudt het zijn bewegingstoestand:

(a) is het voorwerp in rust, dan blijft het in rust;

(b) beweegt het voorwerp met een bepaalde snelheid in een bepaalde richting, dan blijft het eenparig rechtlijnig bewegen met deze snelheid in deze richting.

4.5.2 Tweede wet van Newton

Wanneer de snelheid van het object verandert, kan je ook zeggen dat dat voorwerp een versnelling heeft.

De mate waarin het object door een gegeven kracht versneld wordt, hangt af van de massa van het object. Dit is een scalaire grootheid met als SI-eenheid de kilogram (niet de gram !). De massa van een object is dus een maat voor de weerstand tegen snelheidsveranderingen (= maat voor traagheid).

Hoe moeilijk is het om een object in beweging te krijgen? Bijvoorbeeld als je een doos vooruit wenst te duwen zal je minder kracht moeten uitoefenen dan wanneer je een auto al duwend in beweging wil krijgen. De massa van een auto is dan ook veel groter dan de massa van de doos. Bij dezelfde resulterende kracht zal een object met grote massa een kleine versnelling krijgen en een object met een kleine massa een grote versnelling. De versnelling is bij een een zekere resulterende kracht dus omgekeerd evenredig met de massa.

De tweede wet van Newton geeft een verband tussen de resulterende kracht op een massa en de verandering van de bewegingstoestand van die massa.

Eigenschap 4.5.2 (TWEEDE WET VAN NEWTON)**.**

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a}$$

De tweede wet van Newton is een vectoriële wet. Omdat de resulterende kracht een vectoriële grootheid is, zal de versnelling ook een vector zijn. Bovendien hebben de versnelling en de resulterende kracht dezelfde richting en zin (zie figuur 38).

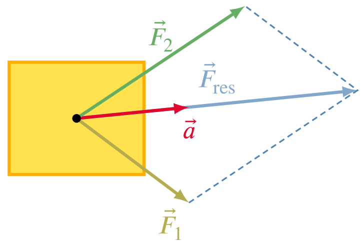
Bij het oplossen van vraagstukken zullen we daarom de tweede wet van Newton schrijven met behulp van krachtcomponenten, met andere woorden we projecteren de krachten, die vectoren zijn, op de x-, y- en z-as, zo bekomen we:

$$\sum_i F_{i,x} = m \cdot a_x \qquad \sum_i F_{i,y} = m \cdot a_y \qquad \sum_i F_{i,z} = m \cdot a_z$$

Dit zijn nu algebraïsche vergelijkingen (geen vectorvergelijkingen) waarmee we kunnen rekenen. Merk op dat de krachtcomponent volgens een bepaalde richting enkel de beweging in dezelfde richting als de krachtcomponent beïnvloedt.

CC BY-NC-SA 4.0

4.5 De wetten van Newton



Figuur 38 – De resulterende kracht (of nettokracht) $\vec{F}_{res}$ is de vectorsom van de krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ die werken op een puntmassa m. Deze nettokracht geeft de massa een versnelling $\vec{a}$ met dezelfde richting en zin als $\vec{F}_{res}$.

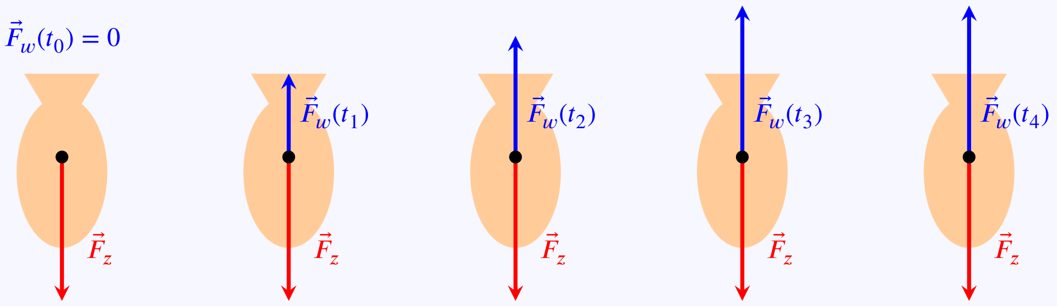
Krachten worden gemeten in newton.

Definitie 4.5.1. Kracht wordt uitgedrukt in newton, symbool N.

Een newton is gedefinieerd als de kracht die nodig is om een massa van 1 kilogram een versnelling van $1\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$ te geven:

$$1\ N = 1\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Voorbeeld 4.5.1. Als je een zandzakje uit de mand van een stilhangende luchtballon laat vallen, werken op het zandzakje twee tegengesteld gerichte krachten: de zwaartekracht $\vec{F}_z$ en de luchtweerstand $\vec{F}_w$. Op tijd nul, bij het loslaten, is de luchtweerstand nog nul, en is de zwaartekracht dus gelijk aan de resulterende kracht. Geleidelijk aan neemt de luchtwrijving toe, waardoor de resulterende kracht, en dus de versnelling van het zandzakje, afneemt. Na verloop van tijd zijn de twee krachten even groot geworden. De luchtweerstand wordt niet nog groter. De resulterende kracht is vanaf dan dus nul, zodat er vanaf dan geen versnelling meer is, en het zandzakje vanaf dan dus eenparig valt.



4.5.3 Derde wet van Newton - wet van actie en reactie

Als je met een hamer een spijker in de muur klopt, moet je de hamer stevig vasthouden: op het ogenblik dat je de spijker raakt, voel je een kracht op de hamer.

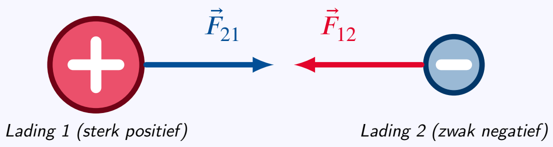
Eigenschap 4.5.3 (DERDE WET VAN NEWTON - WET VAN ACTIE EN REACTIE)**.**

Als een systeem 1 een kracht $\vec{F}_{12}$ uitoefent op een systeem 2, oefent systeem 2 een even grote tegengestelde kracht $\vec{F}_{21}$ uit op systeem 1:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

CC BY-NC-SA 4.0

Voorbeeld 4.5.2. Een negatieve lading 2 trekt een positieve lading 1 aan en tegelijkertijd trekt de positieve lading even sterk de negatieve lading aan.



Enkele opmerkingen:

(a) Volgens de derde wet van Newton treden krachten dus nooit alleen op, maar altijd per twee.

(b) Men noemt deze wet ook wel de wet van actie en reactie: de ene kracht (de 'actie') heeft als gevolg dat er ook een andere kracht ('de reactie') optreedt. Het is echter niet zo dat de ene kracht eerder optreedt dan de andere. Beide krachten treden gelijktijdig op!

(c) De twee krachten grijpen aan op twee verschillende systemen: de ene kracht op het ene systeem, de andere op het andere systeem. Daarom kun je geen resultante bepalen van een actie- en een reactiekracht!

(d) Alhoewel de twee krachten even groot zijn, kan de versnelling van de twee systemen toch verschillend zijn: als een vrachtwagen tegen een personenauto botst, ervaren ze beide een even grote kracht, maar omdat de massa van de vrachtwagen veel groter is dan de massa van de wagen, zal de versnelling van de vrachtwagen ten gevolge van de botsing heel wat kleiner zijn dan die van de wagen. Bovendien is het niet noodzakelijk zo dat de krachten in kwestie de enige zijn die op de systemen werken. Mogelijk werken er nog andere krachten op één of allebei de systemen, en dan bepalen die natuurlijk ook mee de versnelling(en).

CC BY-NC-SA 4.0

4.6 Centripetaalkracht

In het hoofdstuk over kinematica leerden we dat bij een **eenparige cirkelbeweging** de versnellingsvector steeds naar het middelpunt van de cirkel gericht moet zijn. We noemden daarom de versnelling in dat geval ook wel de normale of middelpuntzoekende of centripetale versnelling, of centripetaalversnelling.

Nu vertelt de tweede wet van Newton ons dat de versnellingsvector steeds gelijkgericht is aan de resulterende kracht. Daarom zal in het geval van een eenparige cirkelbeweging, ook de resulterende kracht steeds naar het middelpunt van de cirkel gericht moeten zijn. We noemen daarom de resulterende kracht in dat geval ook wel de normale of middelpuntzoekende of **centripetale** kracht, of **centripetaalkracht**.

Definitie 4.6.1. De centripetaalkracht verandert de snelheidsvector niet van grootte maar enkel van richting. Ze levert zo dus de centripetaalversnelling $a_{CP} = v^2/r$ die nodig is voor een eenparige cirkelbeweging.

Haar grootte is daarom gelijk aan :

$$F_{res} = F_{CP} = m \cdot a_{CP} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

met m de massa van het object, v de grootte van de snelheid van het object, en r de straal van de cirkelbaan.

Voorbeeld 4.6.1. De beweging van de maan rond de aarde kan benaderd worden als een eenparige cirkelbeweging. De enige kracht op de maan (en dus meteen de resulterende kracht op de maan) is de aantrekkende gravitatiekracht F_{grav} van de aarde. We vinden in deze benadering dus dat :

$$F_{grav} = m_{maan} \cdot \frac{v^2}{d_{am}}$$

met d_{am} de afstand aarde-maan.

In het hoofdstuk over kinematica leerden we vervolgens ook dat bij een **niet-eenparige cirkelbeweging**, de versnellingsvector schuin gericht staat. Dat betekende dat de versnellingsvector naast een centripetale component ook een tangentiële component bevat.

Hetzelfde zullen we nu dus ook kunnen zeggen over de resulterende kracht. Deze zal bij de niet-eenparige cirkelbeweging schuin gericht staan, en naast een centripetale component (die we nog steeds 'de centripetaalkracht' zullen blijven noemen) ook een tangentiële component bevatten. De centripetale component van de resulterende kracht zullen we nog steeds de 'centripetaalkracht' blijven noemen, en deze zal nog steeds volgens de hierboven gegeven definitie, gelijkgesteld kunnen worden aan :

$$F_{CP} = m \cdot a_{CP} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Voorbeeld 4.6.2. Een balletje slingert heen en weer aan een touw dat aan het plafond is bevestigd. Bereken de resulterende kracht op het balletje in het onderste punt van de baan.

Hoe is de resulterende kracht in het onderste punt van de baan gericht ?

Hoe is de resulterende kracht in een willekeurig ander punt van de baan gericht ?

Antwoord : Op het balletje werken de neerwaartse zwaartekracht F_z, en de touwkracht F_t die gericht is naar het ophangpunt aan het plafond.

In het onderste punt van de slingerbeweging staat de touwkracht dus opwaarts. De resulterende kracht staat daar, als vectorsom van beide krachtvectoren, dus al zeker verticaal (op- of neerwaarts) gericht.

Omdat we weten dat het balletje een (stuk van) een cirkelbaan aflegt, moet de resulterende kracht

CC BY-NC-SA 4.0

noodzakelijk naar de binnenkant van de cirkelbaan gericht staan, en niet naar de buitenkant. Dit maakt dat de touwkracht $F - t$ daar groter is dan de zwaartekracht F_z, en de resulterende kracht **opwaarts** gericht staat, met als grootte :

$$F_{res} = F_t - F_z$$

In een willekeurig ander punt van de baan zal de resulterende kracht schuin gericht staan, en dus zowel een centripetale als een tangentiële component bevatten. In al deze punten zal de cirkelbeweging niet-eenparig verlopen : tijdens het stijgen zal ze vertraagd gebeuren, en tijdens het dalen versneld.

CC BY-NC-SA 4.0

4.7 Oefeningen Dynamica

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

A) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

B) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

C) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

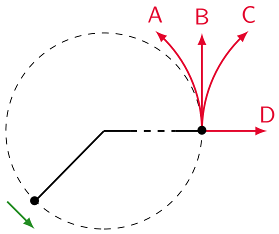
4.7.A Instapoefeningen

Oefening 4.7.1. Een doos staat op een horizontale baan zonder wrijving. De doos wordt geduwd en dan losgelaten. Wat gebeurt er na het loslaten met de doos?

De doos schuift verder met een constante snelheid.✓

Uitwerking: Omdat de doos op de baan ligt, werken in verticale richting de neerwaartse zwaartekracht en de opwaartse normaalkracht op de doos, maar die compenseren elkaar. Eenmaal de doos losgelaten wordt, is er geen kracht meer in de richting van de baan, en dus is de nettokracht vanaf dan nul. Dit betekent niet dat de doos dan vertraagt en stopt, het betekent echter wel dat de doos dan met een constante snelheid gaat bewegen. Er is immers geen kracht nodig om de doos in beweging te houden. Let wel op dat we er hier vanuit gaan dat er geen wrijving is, anders zou de doos wel afremmen. Dit laatste komt overeen met de werkelijkheid uiteraard.

Oefening 4.7.2. Een schijf die vastgemaakt is aan een touw voert een cirkelvormige beweging uit op een luchtkussentafel. Welk pad zou de schijf volgen indien het touw breekt op de plaats P aangegeven op de figuur, die een bovenzicht van de situatie geeft ?



Het juiste pad is B✓.

Uitwerking: Er werken drie krachten op de schijf in : zwaartekracht en normaalkracht (die allebei verticaal werken en mekaar compenseren), en de spankracht in het touw (die horizontaal werkt, en die in deze situatie in zijn eentje de resulterende kracht vormt). De resulterende kracht zorgt voor de centripetale kracht die de schijf op een cirkelbaan houdt. Als het touw breekt, is er geen resulterende kracht meer op de schijf. Volgens de eerste wet van Newton zal de schijf dan voortbewegen op een rechte lijn met een constante snelheidsvector. Het pad dat hiermee overeenkomt is pad B.

Oefening 4.7.3. Een wagen rijdt aan een constante snelheid op een cirkelvormige baan. Beantwoord elk van de volgende vragen met "JA" of "NEE".

1. Is de snelheid van de wagen constant? NEE✓

Uitwerking: De snelheid is een vector die steeds raakt aan de cirkelvormige baan. Deze snelheidsvector blijft niet constant omdat de richting van de vector telkens wijzigt.

2. Is de grootte van de snelheid van de wagen constant? JA✓

Uitwerking: De grootte van de snelheidsvector is constant. Dit staat in de vraagstelling.

3. Is de grootte van de versnelling van de wagen constant? JA✓

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.A Instapoefeningen

Uitwerking: De grootte van de versnelling blijft constant omdat $a_{cp} = \frac{v^2}{R}$ en zowel de grootte v van de snelheid, als de straal R van de cirkel constant blijven.

4. Is de richting van de versnelling van de wagen constant? NEE✓

Uitwerking: De richting van de versnelling blijft niet constant. De versnelling is altijd gericht naar het middelpunt van de cirkel. Deze richting hangt dus af van de positie van de wagen.

Oefening 4.7.4.

1. Een auto rijdt door een bocht met een constante snelheid van 50 km/u. Wanneer de auto diezelfde bocht neemt met een constante snelheid van 70 km/u, is zijn versnelling dan anders in het eerste geval? Licht uw antwoord toe.

Uitwerking: Vermits de grootte van de snelheid constant blijft in beide gevallen, hebben we in beide gevallen enkel een centripetale versnelling. Omdat $a_{cp} = \frac{v^2}{R}$ en de straal van de bocht constant blijft, zal de grootte van de versnelling groter zijn wanneer de auto een grotere snelheid heeft.

2. Als die auto nu met 60 km/u een scherpe bocht neemt, en daarna met dezelfde snelheid een flauwe bocht neemt, is de versnelling dan in beide gevallen gelijk of niet? Leg uw antwoord uit.

Uitwerking: Ook hier hebben we in beide gevallen enkel een centripetale versnelling. In de scherpe bocht is de straal kleiner. Vermits $a_{cp} = \frac{v^2}{R}$ en de snelheid in beide gevallen dezelfde is, zal de grootte van de versnelling in de scherpe bocht groter zijn.

Oefening 4.7.5. Twee kinderen zitten op een paardenmolen. Kind 1 zit op 2 m van de rotatie-as verwijderd en kind 2 zit op 1,5 m van de as verwijderd. De paardenmolen maakt 1 omwenteling in 4,5 s.

1. Vind de hoeksnelheid ω voor beide kinderen

Uitwerking: Beide kinderen maken 1 omwenteling in 4,5 s. Bijgevolg is hun hoeksnelheid dezelfde en gelijk aan

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{4,5\,\text{s}} \approx 1,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

2. Vind de grootte van de snelheid van elk kind.

Uitwerking: De grootte van de snelheid op een afstand R van het rotatiemiddelpunt wordt gegeven door $v = R\omega$. Bijgevolg hebben de kinderen de volgende grootte van de snelheid:

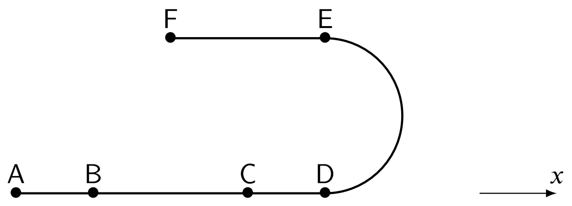
$$v_1 = R_1\omega = 2,8 \text{ m/s},$$
$$v_2 = R_2\omega = 2,1 \text{ m/s}.$$

We zien dus dat het kind aan de buitenkant van de molen een grotere snelheid heeft.

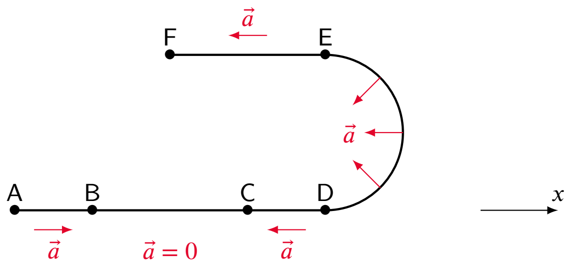
Oefening 4.7.6. Hieronder staat een bovenaanzicht van de beweging van een auto van A naar F. Tussen A en B versnelt de auto. Tussen B en C rijdt de auto aan 70 km/u. Van C naar D drukt de bestuurder op de rem. De auto neemt de bocht vervolgens aan 50 km/u. Tussen E en F drukt de bestuurder het gaspedaal in en rijdt de auto steeds sneller. Bepaal de richting en zin van de versnellingsvector voor elk stuk van de baan.

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.A Instapoefeningen



Uitwerking: De oplossing is te zien op volgende figuur. Tussen D en E is de tangentiële versnelling gelijk aan nul, aangezien de auto de bocht neemt met constante snelheid. Bijgevolg is de versnelling daar centripetaal.



De versnellingsvector is mee met de x-as gericht tussen A en B, en tegen de x-as gericht tussen C en D alsook tussen E en F.

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.B Standaardoefeningen

4.7.B Standaardoefeningen

Oefening 4.7.7. De Aarde bevindt zich op 150 miljoen km van de Zon. De massa van de Aarde bedraagt $5,98 \cdot 10^{24}\text{kg}$, terwijl de massa van de Zon $1,99 \cdot 10^{30}\text{kg}$ bedraagt. Hoe groot is de centripetale versnelling van de Aarde tijdens haar baan rond de Zon, als we deze beweging benaderen als een eenparige cirkelvormige beweging ?

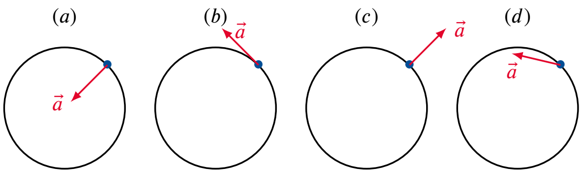
$$a = 5.9 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2}$$

Uitwerking: De enige kracht die op de Aarde werkt, is de zwaartekracht vanwege de Zon. We weten dat de zwaartekracht gegeven wordt door

$$F_z = \frac{GMm}{r^2}$$

met G de gravitatieconstante, M de massa van de zon, m de massa van de aarde en r de afstand tussen beide. Ze werkt aantrekkend en dus gericht naar de Zon toe. Aangezien er geen andere krachten op de Aarde werken, is deze ene kracht meteen ook de resulterende kracht op de Aarde. Bijgevolg is $F_z = ma_{\text{cp}}$, met a_{cp} de centripetale versnelling van de Aarde. Als we beide uitdrukking gelijkstellen aan elkaar, dan vinden we dat de massa van de Aarde wegvalt, en dat $a_{\text{cp}} = \frac{GM}{r^2}$. Vullen we dit in met de gegevens die we hebben (let op: de afstand is hier in km gegeven), dan vinden we het juiste antwoord.

Oefening 4.7.8. Schumacher neemt met zijn Formule 1-wagen een cirkelvormige bocht, en remt een beetje tijdens het draaien. In welke figuur wordt de richting van de versnelling correct voorgesteld? In deze figuur beweegt hij in wijzerzin.

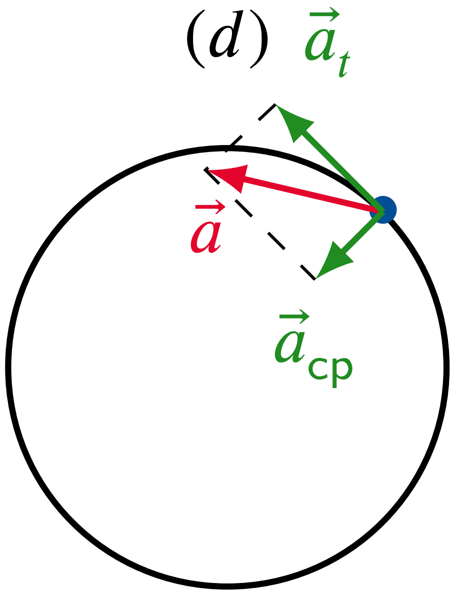


De juiste figuur is (d)✓.

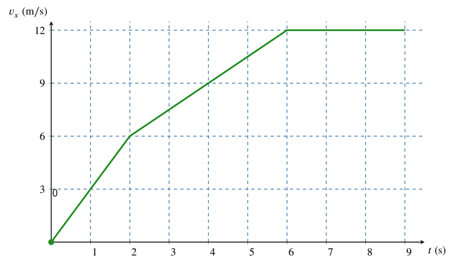
Uitwerking: Het juiste antwoord is (d). De vernelling heeft zowel een centripetaal gerichte component (wagen volgt een cirkelvormige bocht) als een (achterwaarts gerichte) tangentiële component (wagen remt af, zijn snelheid vermindert). De versnellingsvector is dus correct weergegeven in figuur (d).

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.B Standaardoefeningen



Oefening 4.7.9. De figuur geeft de snelheidsgrafiek weer van een deeltje met een massa van $2,0$ kg dat langs de x-as beweegt. Wat is de resulterende kracht op dit deeltje na 1 s, 4 s en 7 s?



1. Na 1 s: 6.0 N

Uitwerking: De versnelling is de afgeleide van de snelheid, en die is na 1 seconde gelijk aan 3 m/s^2, wat we kunnen aflezen als richtingscoëfficiënt van de (raaklijn aan de) grafiek. Het deeltje heeft een massa van 2,0 kg, en dus zegt de tweede wet van Newton ons dat $F_x = 2,0$ kg $\cdot$ 3 m/s$^2 = 6,0$ N.

2. Na 4 s: 3.0 N

3. Na 7 s: 0 N

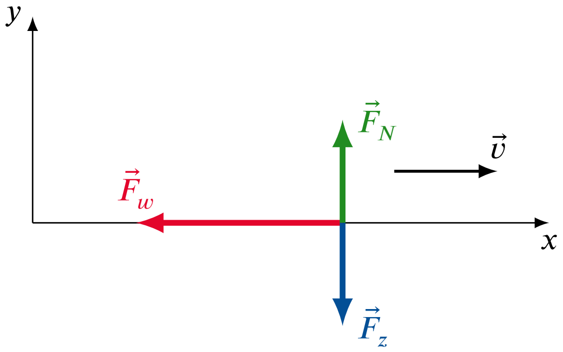
Uitwerking: De snelheid is hier constant, en bijgevolg is de versnelling 0. De tweede wet van Newton zegt ons inderdaad dat er dan geen kracht aanwezig is.

Oefening 4.7.10. Een baseball-speler schuift over de grond met een initiële snelheid van 4,0 m/s. Stel dat de kinetische wrijvingscoëfficiënt tussen zijn schoenen en de grond 0,46 is, hoe ver zal de speler dan glijden voor hij tot rust komt?

Uitwerking: Het krachtendiagramma van de baseball-speler is het volgende

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.B Standaardoefeningen



Met de tweede wet van Newton vinden we voor de x- en y-richting

$$\begin{aligned} ma_x &= -F_w\,, \\ 0 &= F_N - mg\,. \end{aligned}$$

Hier is m de massa van de baseball-speler. Uit de tweede vergelijking halen we dat $F_N = mg$, en als we gebruiken dat $F_w = \mu F_N$, vinden we dat

$$a_x = -\frac{F_w}{m} = -\frac{\mu F_N}{m} = -\mu g\,.$$

Dus we vinden dat $a_x = -0,46 \cdot 9,81$ m/s^2 $\approx 4,5$ m/s^2. We vinden dus een constante versnelling, of dus een eenparig versnelde beweging, en dan weten we dat

$$v_x(t) = v_0 + a_x t\,.$$

De speler komt tot rust wanneer $v_x = 0$ m/s. Dit gebeurt op een tijdstip t^* zodat

$$v_0 + a_x t^* = 0\,,$$

zodat we vinden dat

$$t^* = -\frac{v_0}{a_x} = \frac{4,0}{4,5}\,\mathrm{s} \approx 0,89\,\mathrm{s}\,.$$

De positie van de speler vinden we dan met

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a_x}{2} t^2\,.$$

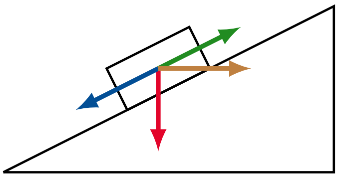
De verplaatsing in de x-richting is gelijk aan $\Delta x = x(t^*) - x_0$, en zo kunnen we bereken dat

$$\begin{aligned} \Delta x &= x(t^*) - x_0 \\ &= v_0 t^* + \frac{a_x}{2}(t^*)^2 \\ &= 4,0 \cdot 0,89\,\mathrm{m} - \frac{4,5}{2} \cdot (0,89)^2\,\mathrm{m} \\ &\approx 1,8\,\mathrm{m}\,. \end{aligned}$$

Oefening 4.7.11. Een voorwerp krijgt een stoot onderaan een helling en schuift daarna zonder wrijving omhoog langs de helling. Welke vector geeft de resulterende kracht juist weer na de stoot, dus tijdens het omhoog schuiven?

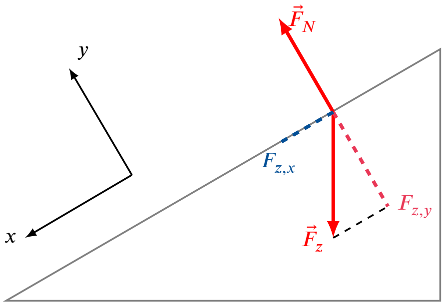
CC BY-NC-SA 4.0

4.7.B Standaardoefeningen

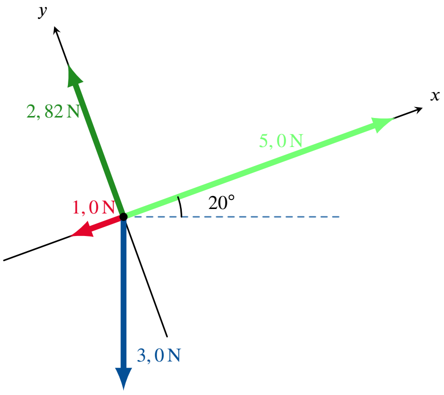


Blauw✓

Uitwerking: Na de stoot werken enkel de zwaartekracht en de normaalkracht nog in op de doos. De y-component van de zwaartekracht heft de normaalkracht op, en enkel de x-component van de zwaartekracht blijft nog over. Deze is tegengesteld aan de snelheidsvector gericht, en zorgt zo dus voor vertraging.



Oefening 4.7.12. Op een massa van $2,0$ kg werken vier krachten, zoals weergegeven op de figuur. Bepaal de x- en y-component van de versnelling ten opzichte van het aangeduide assenstelsel.

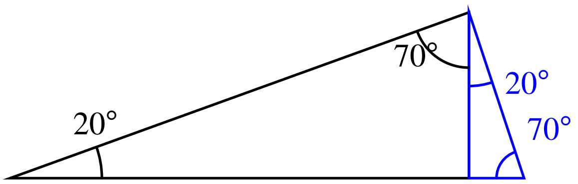


1. $a_x = 1.5$ m/s^2
2. $a_y = 0$ m/s^2

Uitwerking: De x- en y-as zijn niet horizontaal en verticaal gericht, maar dit is geen probleem, en zelfs eenvoudiger in dit geval. We zullen de krachten ontbinden volgens deze nieuwe assen. Hiertoe hebben we eerst de hoek nodig tussen de blauwe vector en de y-as. Deze hoek is 20°, zoals duidelijk wordt gemaakt in de figuur. De grote, samengestelde driehoek is rechthoekig, net als de kleinere blauwe driehoek.

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.B Standaardoefeningen



Nu kunnen we de componenten van de blauwe vector berekenen volgens het nieuwe assenstelsel:

$$F_x = -3,0 \text{ N} \cdot \sin 20° = -1,0 \text{ N},$$
$$F_y = -3,0 \text{ N} \cdot \cos 20° = -2,82 \text{ N}.$$

Het minteken in beide gevallen is om rekening te houden met het feit dat de projecties volgens de nieuwe assen op de negatieve kant van de as terechtkomen.

Nu kunnen we de krachten optellen volgens beide assen, om de resulterende krachten te vinden. Zo vinden we dat

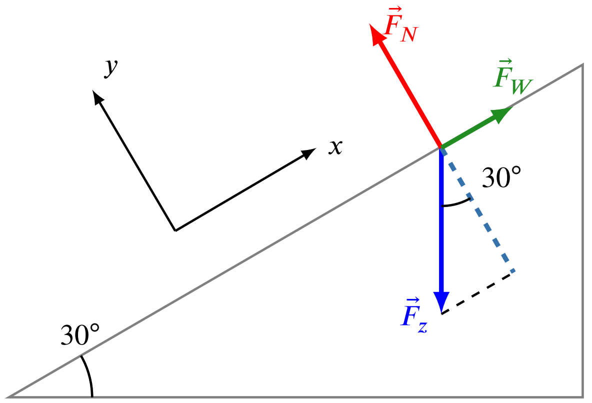
$$F_{x,\text{tot}} = (5,0 - 1,0 - 1,0) \text{ N} = 3,0 \text{ N},$$
$$F_{y,\text{tot}} = (2,82 - 2,82) \text{ N} = 0 \text{ N}.$$

De tweede wet van Newton met een massa van 2,0 kg geeft ons dan het resultaat.

Oefening 4.7.13. Een dakwerker met een massa van 87 kg staat op een dak met een helling van 30°. Hoe groot is de normaalkracht van het dak op de dakwerker?

$$F_N = 739 \ N$$

Uitwerking: We beginnen met het krachtendiagram te tekenen:



De drie krachten die op de dakwerker inwerken, zijn de zwaartekracht (blauw), de normaalkracht (rood) en de statische wrijvingskracht (groen). Merk op dat we in deze situatie inderdaad zeker wrijvingskracht nodig hebben, opdat de man op het dak zou blijven staan zonder er af te schuiven (of dus : deze wrijvingskracht moet de x-component van de zwaartekracht compenseren). Er is ook geen beweging in de y-richting. Bijgevolg moeten de normaalkracht en de y-component van de zwaartekracht elkaar opheffen. Deze laatste wordt

CC BY-NC-SA 4.0

gegeven door $F_{z,y} = F_z \cos 30°$. Bijgevolg vinden we dat

$$\begin{aligned} F_N &= F_z \cos 30° \\ &= mg \cos 30° \\ &= 87\text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot \cos 30° \\ &= 739\text{ N}. \end{aligned}$$

Oefening 4.7.14. Een reiskoffer van 23 kg wordt horizontaal verder getrokken door een kracht $\vec{F}$ van 110 N onder een hoek van 25° boven de horizontale. Hierbij wordt de wrijving verwaarloosd.

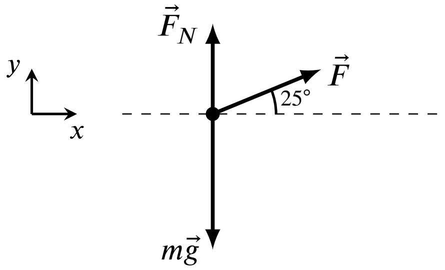
1. Bereken de normaalkracht op de koffer (rond af zonder komma). $F_N = 180N$

2. Bereken de versnelling van de koffer (rond af tot op één getal na de komma, bv. 1.4).

$$\vec{a} = (4.3\ ;\ 0)\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Feedback: $F_N < mg$ omdat de y-component van de trekkracht en de normaalkracht samen de zwaartekracht mg compenseren. Zonder aanwezigheid van de trekkracht is $F_N = mg$.

Uitwerking: Het krachtendiagramma wordt gegeven door:



$$\begin{aligned} x:&\quad F\cos 25° = ma_x &(1)\\ y:&\quad F_N - mg + F\sin 25° = ma_y = 0 &(2)\end{aligned}$$

Vraag 1: Uit (2) volgt:

$$\begin{aligned} F_N &= mg - F\sin 25° \\ &= 23 \cdot 9,81N - 110N \cdot \sin 25° \\ &\approx 180N \end{aligned}$$

Merk op: $F_N < mg$.

Vraag 2: Uit (1) volgt:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{F\cos 25°}{m} \\ &= \frac{110N \cdot \cos 25°}{23\text{kg}} \\ &\approx 4,3\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

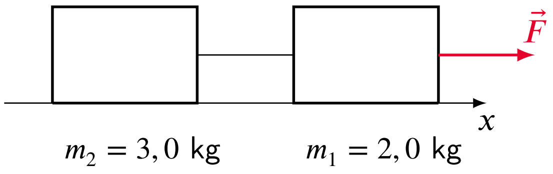
De versnelling van de doos is

$$\vec{a} = (4,3\ ;\ 0)\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4,3\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \vec{e}_x.$$

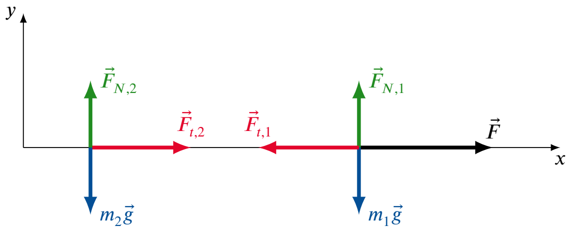
CC BY-NC-SA 4.0

4.7.B Standaardoefeningen

Oefening 4.7.15. Twee blokken zijn met elkaar verbonden via een touw. Ze worden verder getrokken door een kracht met grootte $F = 5$ N. Bereken de versnelling van beide blokken en de spankracht in het touw. De tafel mag wrijvingsloos verondersteld worden.



Uitwerking: We maken eerst het krachtendiagram voor beide blokken.



We passen de tweede wet van Newton toe voor beide massa's in de x- en y-richting.

$$F - F_{t,1} = m_1 a_{1,x}$$
$$F_{N,1} - m_1 g = 0$$

$$F_{t,2} = m_2 a_{2,x}$$
$$F_{N,2} - m_2 g = 0$$

Omdat beide blokken aan elkaar vasthangen, en de tweede voortgetrokken wordt door de eerste, hebben ze dezelfde snelheid op elk moment. Bijgevolg hebben ze ook dezelfde versnelling.

$$a_{1,x} = a_{2,x} \equiv a_x$$

Bovendien geldt, omdat beide touwkrachten afkomstig zijn van hetzelfde touw : $F_{t,1} = F_{t,2} = F_t$.

Als we al dit gebruiken vinden we dat (de vergelijkingen voor de y-richting hebben we niet nodig)

$$\begin{cases} F - F_t &= m_1 a_x \\ F_t &= m_2 a_x \end{cases}$$

We kennen de massa's, net als F, en hebben dus 2 vergelijkingen voor 2 onbekenden. Als we de tweede in de eerste invullen vinden we dat

$$a_x = \frac{F}{m_1 + m_2} = 1 \text{ m/s}^2 .$$

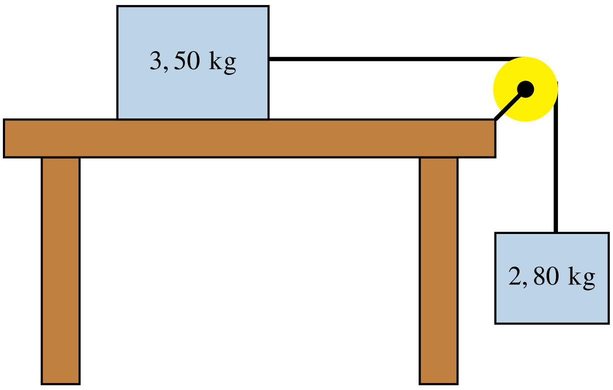
Uit de andere vergelijking halen we dan nog dat

$$F_t = m_2 a_x = 3\,\text{N} .$$

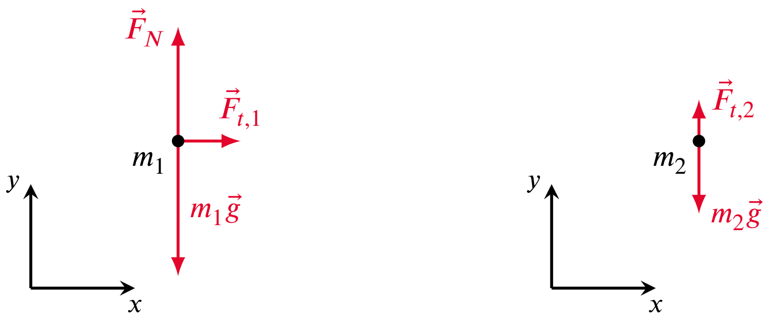
Oefening 4.7.16. Een blok van $3,50$ kg ligt op een gladde wrijvingsloze tafel en is via een touw verbonden met een blok van $2,80$ kg zoals weergegeven in onderstaande figuur. Zoek de versnelling a van de massa's en de spankracht F_t in het touw. Antwoord: $|a| = 4.36$ m/s^2, $F_t = 15.3$ N.

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.B Standaardoefeningen



Uitwerking: Stel $m_1 = 3,50$ kg en $m_2 = 2,80$ kg. De krachtendiagramma's voor m_1 en m_2 zijn



De tweede wet van Newton toepassen voor m_1 en m_2 geeft:

$$F_{t,1} = m_1 a_{1,x} \tag{1}$$

$$F_{t,2} - m_2 g = m_1 a_{1,x} = m_2 a_{2,y} \tag{2}$$

Voor de spankrachten geldt, omdat ze van hetzelfde touw afkomstig zijn:

$$F_{t,1} = F_{t,2} = F_t$$

Voor de verplaatsingen Δx_1 en Δy_2 geldt (in dezelfde tijdstap Δt):

$$\Delta y_2 = -\Delta x_1.$$

Dus

$$\frac{\Delta y_2}{\Delta t} = -\frac{\Delta x_1}{\Delta t}.$$

Dit geldt ook in de limiet $\Delta t \to 0$, dus:

$$v_{y,2} = -v_{x,1} \qquad \Rightarrow \qquad a_{y,2} = -a_{x,1}.$$

Stel nu $a = a_{x,1}$, dan is

$$a_{y,2} = -a_{x,1} = -a$$

Met de gedefinieerde symbolen herschrijven we (1) en (2):

$$F_t = m_1 a \tag{3}$$

$$F_t - m_2 g = -m_2 a \tag{4}$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.B Standaardoefeningen

We hebben twee onbekenden en een stelsel van twee vergelijkingen dat we kunnen oplossen: (3) in (4):

$$
\begin{aligned}
& m_1 a - m_2 g = -m_2 a \\
\Rightarrow \quad & a(m_1 + m_2) = m_2 g \\
\Rightarrow \quad & a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} \\
& \quad = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}
\end{aligned}
$$

Invullen geeft : $a = 4,36 \ \frac{m}{s^2}$

Uit (3) halen we:

$$
\begin{aligned}
F_t &= m_1 a \\
&\approx 15,3N
\end{aligned}
$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.C Gevorderde oefeningen

Oefening 4.7.17. De Aarde voert rond de Zon in werkelijkheid een niet-eenparige beweging uit op een niet-cirkelvormige baan. Bereken de gemiddelde hoeksnelheid van de Aarde in haar werkelijke beweging rond de zon.

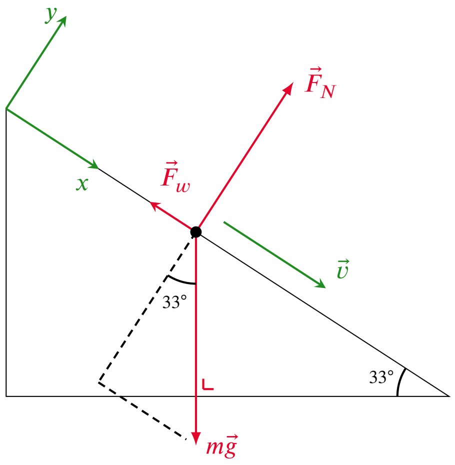
Uitwerking: Voor de gemiddelde hoeksnelheid is de precieze beweging en de precieze vorm van de baan niet van belang. De Aarde draait rond de zon in één jaar, dus is de gemiddelde hoeksnelheid gelijk aan

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ yr}} = \frac{2\pi \text{ rad}}{365 * 24 * 60 * 60\,\text{s}} \approx 2.10^{-7}\frac{\text{rad}}{\text{s}}\,.$$

Merk op dat men in de deze vraag de gemiddelde hoeksnelheid bedoelt na een geheel aantal jaren. Berekent men de gemiddelde hoeksnelheid na een willekeurige andere tijdsperiode, dan zal dat niet helemaal hetzelfde resultaat opleveren, vooral niet als die tijdsperiode kort is, vb. korter dan een jaar.

Oefening 4.7.18. In een speeltuin glijdt een kind van een glijbaan met een versnelling van $1,26$ m/s^2. De glijbaan maakt een hoek van $33°$ onder de horizontale. Zoek de wrijvingscoëfficiënt μ_k tussen het kind en de glijbaan. $\mu_k = 0.496$

Uitwerking: Het krachtendiagramma van het kind wordt gegeven door:



$$\begin{aligned} x:&\quad -F_w + mg\sin\theta = ma_x \qquad (1)\\ y:&\quad F_N - mg\cos\theta = ma_y = 0 \qquad (2)\end{aligned}$$

Uit (2) volgt dat $F_N = mg\cos\theta$. Omdat $F_w = \mu_k F_N$, volgt uit (1) dat

$$-\mu_k F_N + mg\sin\theta = ma_x.$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.C Gevorderde oefeningen

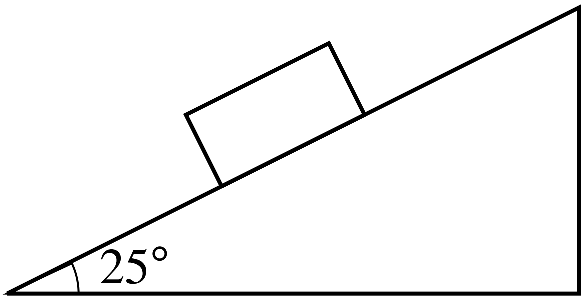
Vullen we $F_N = mg\cos\theta$ hierin in:

$$\begin{aligned} & -\mu_k mg\cos\theta + mg\sin\theta = ma_x \\ \Rightarrow\quad & -\mu_k g\cos\theta + g\sin\theta = a_x \\ \Rightarrow\quad & -\mu_k g\cos\theta = a_x - g\sin\theta \\ \Rightarrow\quad & -\mu_k g\cos\theta = a_x - g\sin\theta \\ \Rightarrow\quad & \mu_k = -\left(\frac{a_x - g\sin\theta}{g\cos\theta}\right) \\ & \quad = \frac{g\sin\theta - a_x}{g\cos\theta} \\ & \quad = \tan\theta - \frac{a_x}{g\cos\theta} \end{aligned}$$

Invullen van alle bekenden geeft:

$$\begin{aligned} \mu_k &= \tan 33° - \frac{1,26}{9,81\cdot\cos 33°} \\ &\approx 0,496\,. \end{aligned}$$

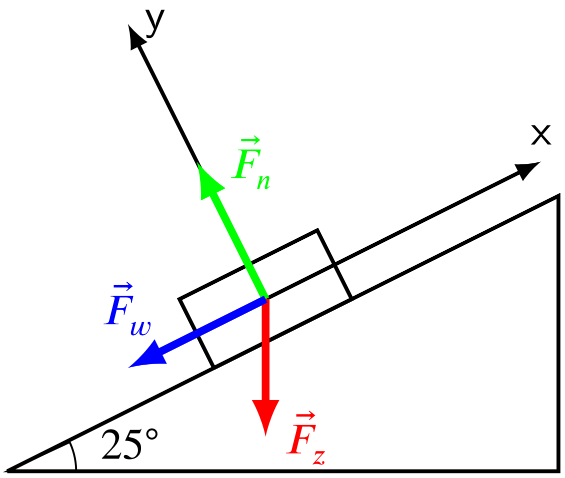
Oefening 4.7.19. Een blok met een massa van $6,0$ kg ligt op een schuine helling die een hoek van $25°$ maakt met de horizontale richting. We geven een forse tik tegen het blok zodat het de helling opschuift met een beginsnelheid van $15\frac{\text{m}}{\text{s}}$. De wrijvingskracht bedraagt 20 N. Na hoeveel tijd zal het blok zijn beginpositie weer bereiken?



1. Aankomst in beginpunt na: 8.1 s

Uitwerking: We maken een onderscheid tussen de opwaartse en neerwaartse beweging. Eerst beschouwen we de opwaartse beweging en tekenen we het krachtendiagram met daarbij een assenstelsel. Er werken drie krachten op het blok: de zwaartekracht $\vec{F}_z$, de normaalkracht $\vec{F}_n$ en de wrijvingskracht $\vec{F}_w$.

4.7.C Gevorderde oefeningen



We schrijven nu de tweede wet van Newton in de x-richting:

$$-20\ \text{N} - mg \cdot \sin(25°) = m \cdot a_x$$

Hieruit volgt dat

$$a_x = \frac{-20\ \text{N} - 6,0\ \text{kg} \cdot 9,81\frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot \sin(25°)}{6,0\ \text{kg}} = -7,5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

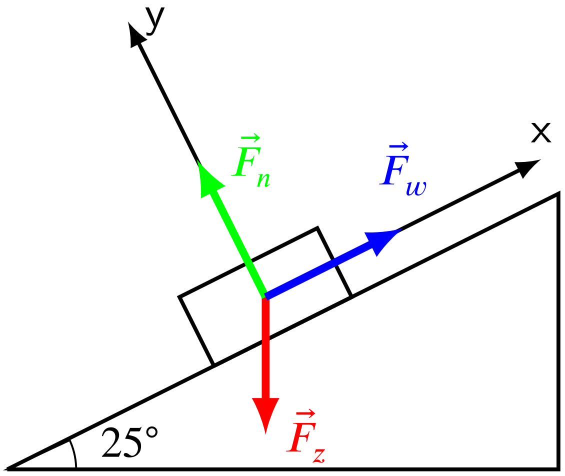
Omdat de versnelling constant is in de x-richting, kunnen we de formules van de eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging gebruiken. Er geldt dat de snelheid nul wordt in het hoogste punt, dus

$$v_x = v_{x,0} + a_x \cdot t \Rightarrow t = \frac{v_x - v_{x,0}}{a_x} = \frac{0 - 15\frac{\text{m}}{\text{s}}}{-7,5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2,0\ \text{s}$$

Bijgevolg is de x-coördinaat van het hoogste punt gelijk aan

$$x = x_0 + v_{x,0} \cdot t + \frac{a_x}{2} \cdot t^2 = 0 + 15\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2,0\ \text{s} - \frac{7,5}{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2,0\ \text{s})^2 = 15\ \text{m}$$

Nu beschouwen we de neerwaartse beweging en tekenen het krachtendiagram opnieuw met daarbij het assenstelsel. Er werken opnieuw drie krachten op het blok: de zwaartekracht $\vec{F}_z$, de normaalkracht $\vec{F}_n$ en de wrijvingskracht $\vec{F}_w$, die nu tegengesteld georiënteerd is.



CC BY-NC-SA 4.0

4.7.C Gevorderde oefeningen

We schrijven nu de tweede wet van Newton in de x-richting:

$$20\ \text{N} - mg \cdot \sin(25°) = m \cdot a_x$$

Hieruit volgt dat

$$a_x = \frac{20\ \text{N} - 6,0\ \text{kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot \sin(25°)}{6,0\ \text{kg}} = -0,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

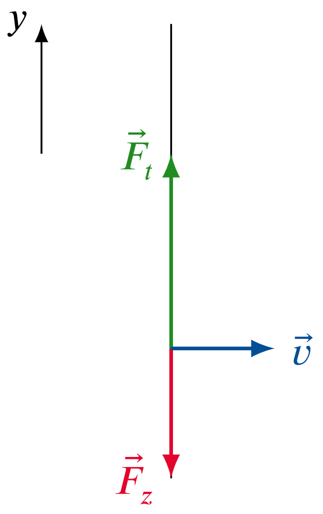
Omdat ook nu de versnelling constant is in de x-richting, kunnen we de formules van de eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging gebruiken. Er geldt dat de x-xoördinaat weer nul wordt als

$$x = x_0 + v_{x,0} + \frac{a_x}{2} \cdot t^2 \Leftrightarrow 0 = 15\ \text{m} - \frac{0,81}{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 \Leftrightarrow t = 6,1\ \text{s}$$

Bijgevolg is de duur van opwaartse en neerwaartse beweging samen gelijk aan 8,1 s.

Oefening 4.7.20. In de jungle slingert Tarzan (m = 63 kg) aan een touw van 6,9 m lang. Wat is de spanning in het touw als Tarzan met een snelheid van 2,4 m/s vliegt wanneer het touw verticaal is (laagste positie) ?

Uitwerking: We stellen eerst het krachtendiagram van Tarzan op:



De versnelling die Tarzan ondervindt is de centripetale versnelling, als gevolg van zijn slingerbeweging aan het touw. Omdat Tarzans beweging in dat onderste punt overgaat van versneld naar vertraagd, is er daar heel even geen tangentiële versnelling aanwezig. De tweede wet van Newton in de y-richting geeft ons dan dat

$$F_t - mg = m\frac{v^2}{R}$$

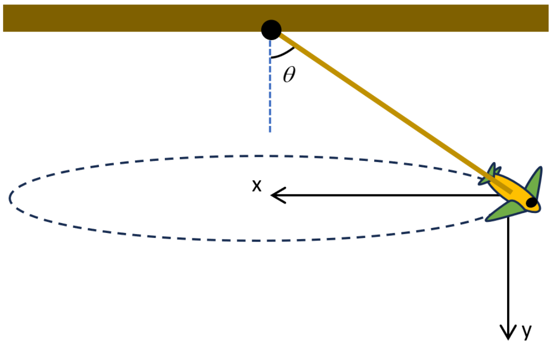
Hieruit halen we dat

$$F_t = mg + m\frac{v^2}{R} = 670\,\text{N}\,.$$

Oefening 4.7.21. Een speelgoedvliegtuigje met massa $m = 0,075$ kg is vastgemaakt aan het plafond met een touw. Wanneer de motor van het vliegtuigje gestart wordt, beweegt het met een constante snelheid van $1,21$ m/s in een horizontale cirkel met straal $0,44$ m.

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.C Gevorderde oefeningen

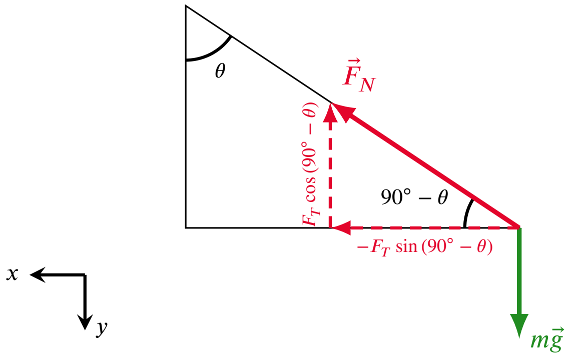


1. Zoek de hoek θ die het touw maakt met de verticale (rond af tot op een graad).

$$\theta = 19\ ^\circ$$

2. Zoek de spanning F_T in het touw.

$$F_T = 0,78\ N$$



Uitwerking:

N.B. In deze figuur hebben we de motorkracht van het vliegtuigje, die rakend aan de cirkel gericht is, én de luchtwrijving, die daaraan tegengesteld gericht is, niet getoond. Beide krachten compenseren elkaar.

$$\begin{aligned} x:&\quad \frac{mv^2}{R} = F_T\cos(90° - \theta) = F_T\sin\theta \quad (1)\\ y:&\quad mg - F_T\sin(90° - \theta) = 0 \quad (2)\end{aligned}$$

Uit (2) halen we dat

$$mg - F_T\cos\theta = 0$$

en dus

$$F_T = \frac{mg}{\cos\theta}.$$

4.7.C Gevorderde oefeningen

Invullen in (1) levert

$$\begin{aligned} & \frac{mv^2}{R} = \frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta \\ \Rightarrow \quad & \frac{v^2}{R} = \frac{g}{\cos\theta}\sin\theta \\ \Rightarrow \quad & \tan\theta = \frac{v^2}{gR} = \frac{(1,21)^2}{9,81\cdot 0,44} = 0,339194\ldots \\ \Rightarrow \quad & \theta \approx 19^\circ \end{aligned}$$

Met deze hoek kunnen we F_T berekenen:

$$F_T = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{0,075\cdot 9,81}{\cos(18,73\ldots^\circ)} \approx 0,78N.$$

Feedback: De centripetale kracht is GEEN extra kracht maar de centripetale component van de resulterende kracht (de resulterende kracht is in deze oefening de som van de zwaartekracht en de spankracht). De centripetale kracht wordt dus geleverd door de aanwezige krachten. De grootte van de centripetale kracht is $\frac{mv^2}{R}$. De centripetale kracht is gericht naar het centrum van de cirkelbeweging. Met het gekozen assenstelsel in deze oefening volgens de positieve x-as. De zwaartekracht staat loodrecht op de x-as en heeft bijgevolg geen x-component, De centripetale kracht wordt dus enkel geleverd door de x-component van de spankracht.

CC BY-NC-SA 4.0

4.7.D Oefeningen Usolv-it

Oefening 4.7.22. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over de wetten van Newton via het Usolv-it oefenplatform.

Oefening 4.7.23. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over soorten krachten via het Usolv-it oefenplatform.

Oefening 4.7.24. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over de gravitatiekracht via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Intro arbeid en energie

In dit hoofdstuk definiëren we de arbeid die door een kracht wordt uitgeoefend op een voorwerp, en tonen aan hoe die arbeid gerelateerd is aan de kinetische energie van het voorwerp. Vervolgens bespreken we de potentiële energie van een voorwerp, en zien we wanneer de mechanische energie ervan behouden blijft.

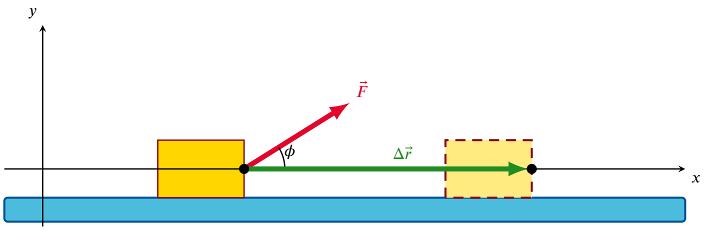
5.2 Arbeid en vermogen

5.2.1 Definitie van arbeid

Wanneer je een doos verderduwt over een ruwe vloer, verricht je spierkracht arbeid. Hoe groter de uitgeoefende spierkracht, hoe groter de arbeid. En ook hoe groter de afstand waarover je de doos duwt, hoe groter de verrichte arbeid.

Neem een massa die op een rechte baan een verplaatsing $\Delta\vec{r}$ maakt en daarbij een constante kracht $\vec{F}$ ondervindt (zie figuur). De arbeid geleverd door de kracht $\vec{F}$ wordt gedefinieerd als het scalair product van de kracht en de verplaatsing:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot |\Delta r| \cdot \cos\phi.$$



Figuur 39 – Arbeid door een kracht $\vec{F}$ op een massa bij een verplaatsing $\Delta\vec{r}$.

Afhankelijk van de hoek kan de arbeid positief ($\phi < \frac{\pi}{2}$), negatief ($\phi > \frac{\pi}{2}$) of nul zijn ($\phi = \frac{\pi}{2}$).

De arbeid geleverd door een kracht die loodrecht staat op de verplaatsing is dus steeds nul. Dit is bijvoorbeeld steeds het geval voor de normaalkracht, die immers steeds loodrecht staat op de bewegingsrichting.

Arbeid is een scalaire grootheid met als SI-eenheid $1\ Nm = 1\ \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = 1\,J$.

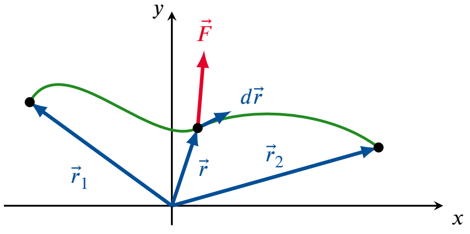
Wanneer de kracht echter tijdens de verplaatsing van punt 1 naar punt 2 niet constant blijft, gebruiken we voor de arbeid de integraal over de kracht $\vec{F}$ tijdens deze verplaatsing.

Definitie 5.2.1. De arbeid die een kracht verricht is de integraal van de kracht met betrekking tot de verplaatsing langs het pad van de verplaatsing:

$$W_{1\to2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

De eenheid van arbeid is joule (J).

Voor een ééndimensionale beweging langs de x-as vereenvoudigt dit tot $W_{1\to2} = \int_1^2 F_x \cdot dx$.

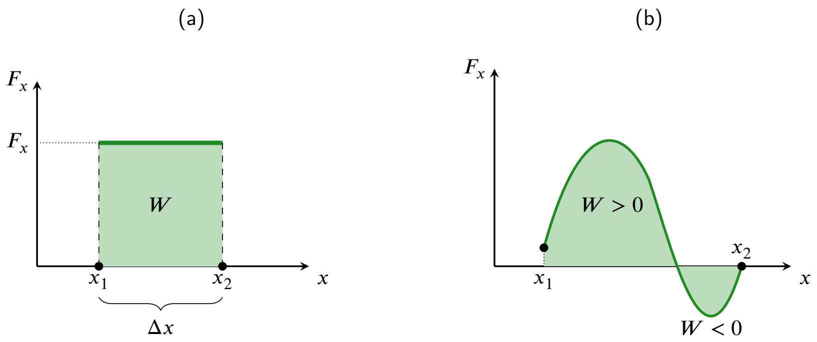


Figuur 40 – Arbeid door een niet-constante kracht $\vec{F}$ op een puntmassa bij een verplaatsing van 1 naar 2 langsheen een kromme.

CC BY-NC-SA 4.0

5.2.2 Grafische betekenis van arbeid

Uit $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ (voor een constante kracht) volgt dat voor een ééndimensionale beweging langs de x-as geldt dat $W = F_x \cdot \Delta x$ als je de x-as kiest volgens de baan van het voorwerp. Als F_x constant is in elk punt van de baan ziet de $F_x(x)$-grafiek er uit zoals de linker grafiek hieronder. De arbeid W die een constante kracht $\vec{F}$ verricht tijdens een verplaatsing Δx is dan de oppervlakte onder de $F_x(x)$-rechte voor het interval Δx.



Figuur 41 – grafische betekenis van arbeid bij (a) een constante kracht en (b) een niet-constante kracht.

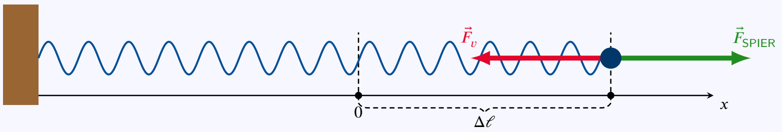
Dit principe is ook geldig voor een niet-constante kracht. Algemeen geldt:

(a) Als F_x positief is tussen x_1 en x_2, is de arbeid gelijk aan de oppervlakte van de figuur gelegen tussen de kromme, de x-as en de rechten $x = x_1$ en $x = x_2$.

(b) Als de kracht F_x verandert van teken in het interval, is de integraal de som van de oppervlakten van de delen van de figuur die boven de x-as liggen verminderd met de oppervlakten van de delen die onder de x-as liggen.

(c) De arbeid is nul als beide oppervlakten gelijk zijn.

Voorbeeld 5.2.1 (De arbeid nodig om een veer uit te rekken)**.** We berekenen de arbeid die je spierkracht moet verrichten om een veer uit te rekken over een afstand d.



Figuur 42 – Uitrekking van een veer waarbij $F_{SPIER} = F_v$

De grootte van de veerkracht van een veer die uitgerekt is over een afstand $\Delta\ell$, wordt gevonden via de wet van Hooke:

$$F_v = k \cdot \Delta\ell.$$

Hierin is k de veerconstante. Hoe groter de uitrekking, hoe groter de veerkracht. Bijgevolg is de veerkracht tijdens de uitrekking van de veer niet constant.

Als je de veer met constante snelheid uitrekt, is de spierkracht op elk ogenblik even groot als de veerkracht:

$$F_{SPIER} = F_v = k \cdot \Delta\ell.$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Arbeid en vermogen

De spierarbeid nodig om de veer over een afstand d uit te rekken, moet je berekenen met de formule

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_{\text{SPIER},x} \cdot dx$$

omdat de spierkracht niet constant is. We kiezen de x-as zoals in de figuur.

De functie die hier overeenkomt met $F_x(x)$ is gelijk aan $F_x(x) = k \cdot x$ want hier is de veranderlijke grootheid $\Delta\ell$ en door de keuze van het assenstelsel is $\Delta\ell = x$.

$$\begin{aligned} W &= \int_0^d k \cdot x\, dx \\ &= k \cdot \int_0^d x\, dx \\ &= k \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^d \\ &= k \cdot \frac{d^2}{2} \end{aligned}$$

Dit is dus de arbeid die de spierkracht verricht tijdens het uitrekken van een veer met veerconstante k over een afstand d.

Uit vorig voorbeeld besluiten we:

Eigenschap 5.2.1. De spierkracht levert een arbeid $k \cdot \frac{(\Delta\ell)^2}{2}$ om de veer met veerconstante k uit te rekken over een afstand $\Delta\ell$.

5.2.3 Vermogen

Definitie 5.2.2. Het gemiddelde vermogen P_g van (de kracht $\vec{F}$ uitgeoefend op) een systeem in een tijdsduur Δt, is de arbeid W die erop verricht wordt per tijdseenheid:

$$P_g = \frac{W}{\Delta t}.$$

Vermogen wordt uitgedrukt in watt (W): $1\ \mathrm{W} = 1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Arbeid en kinetische energie

Van een systeem dat in staat is arbeid te leveren, zegt men dat het energie bezit. Arbeid leveren is energie verbruiken. Dat zowel arbeid als energie scalaire grootheden zijn, beide uitgedrukt in dezelfde eenheid joule, is dan ook geen toeval.

De kinetische energie is de energie die een massa bezit omwille van zijn (snelheid en dus) beweging. We gebruiken hiervoor het symbool E_k.

$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}.$$

In tegenstelling tot arbeid, is kinetische energie altijd positief.

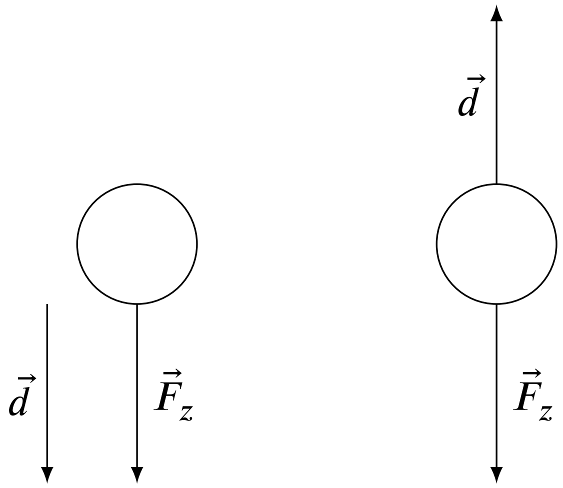
De arbeid die de resulterende kracht uitoefent op een massa is gelijk aan de verandering van kinetische energie van de massa. Dit is de wet van arbeid en kinetische energie, die als volgt wordt uitgedrukt:

$$W_{1\to 2} = E_k(2) - E_k(1) = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2}.$$

Wanneer op een object een resulterende kracht werkt over een bepaalde afstand, verricht deze kracht arbeid op dat object wat resulteert in een snelheidsverandering van het object. Bijgevolg zal ook de kinetische energie van het object veranderen, met een bedrag precies gelijk aan de geleverde arbeid:

(a) Als de resulterende kracht positieve arbeid levert op een object, neemt de kinetische energie van het object toe. Dit is het geval voor de linker massa in Figuur 43, waar de kracht op de massa en de verplaatsing van de massa volgens dezelfde zin zijn. De kracht werkt mee met de beweging.

(b) Als de resulterende kracht negatieve arbeid levert op een object, neemt de kinetische energie van het object af. Dit is het geval voor de rechter massa in Figuur 43, waar de kracht op de massa en de verplaatsing van de massa volgens tegengestelde zin zijn. In dat geval werkt de kracht de beweging tegen.



Figuur 43 – Deze figuren tonen hoe de zin van de beweging en van de kracht het teken van de arbeid beïnvloeden: in de linkse situatie levert de zwaartekracht positieve arbeid tijdens de verplaatsing (de kinetische energie neemt toe), in de rechtse situatie negatieve arbeid (de kinetische energie neemt af).

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Potentiële energie

We kunnen de soorten krachten onderverdelen in conservatieve en niet-conservatieve krachten.

Definitie 5.4.1.

Conservatieve krachten zijn krachten waarvoor de arbeid die op een systeem verricht wordt tussen twee punten niet afhankelijk is van de gevolgde weg.
Voorbeelden: de zwaartekracht, de gravitatiekracht, de coulombkracht, ...

Niet-conservatieve krachten zijn krachten waarvoor de arbeid tussen twee punten wel afhankelijk is van de gevolgde weg.
Voorbeelden: de wrijvingskracht, de spierkracht, de kracht van een motor, de normaalkracht, ...

Voor conservatieve krachten kunnen we bijhorende potentiële energie E_P definiëren door te stellen dat voor die conservatieve kracht geldt dat

$$W_{1\to 2,C} = -\Delta E_p = E_p(1) - E_p(2).$$

(a) Levert een conservatieve kracht positieve arbeid op een object, dan neemt de bijhorende potentiële energie van dat object af.

(b) Levert een conservatieve kracht negatieve arbeid op een object, dan neemt de bijhorende potentiële energie van dat object toe.

Een onmiddellijk gevolg van deze definitie van potentiële energie is dat de potentiële energie van een object maar bepaald is op een constante na. Vaak kiest men een referentiepunt waar men de potentiële energie van een object nul stelt.

Eigenschap 5.4.1. Wanneer een object zich op een bepaalde positie in een (conservatief) krachtveld bevindt, krijgt het potentiële energie. De potentiële energie van dit object is gelijk aan de arbeid die de veldkracht op het object zou leveren bij een verplaatsing van dat object van zijn positie naar het referentiepunt.

Op basis van deze definitie kan je voor de verschillende soorten krachtvelden de bijhorende potentiële energie van een object berekenen. We geven de potentiële energie voor enkele conservatieve krachten:

Conservatieve kracht	**Potentiële energie**
Zwaartekracht	$E_p = m \cdot g \cdot h$
Gravitatiekracht	$E_p = -\dfrac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r}$
Veerkracht	$E_p = \dfrac{1}{2} k \cdot (\Delta \ell)^2$
Coulombkracht	$E_p = \dfrac{k \cdot Q_1 \cdot Q_2}{r}$

CC BY-NC-SA 4.0

5.5 Behoudswetten

De mechanische energie van een systeem is het geheel van zijn kinetische en potentiële energie:

$$E_{mech} = E_k + E_p.$$

De arbeid verricht door niet-conservatieve krachten (bv. de wrijvingskracht) op een puntmassa is gelijk aan de verandering van mechanische energie van die puntmassa:

$$\begin{aligned} W_{NC} &= \Delta E_{\text{mech}} \\ &= E_{\text{mech}}(2) - E_{\text{mech}}(1) \end{aligned}$$

Als er geen niet-conservatieve krachten aanwezig zijn of als de resulterende niet-conservatieve kracht geen arbeid op het systeem verricht, is $\Delta E_{\text{mech}} = 0$ of $E_{\text{mech}}(1) = E_{\text{mech}}(2)$ en blijft de mechanische energie van het systeem behouden.

In een systeem met alleen conservatieve krachten blijft dus de mechanische energie steeds behouden:

$$E_{\text{mech}} = E_k + E_p = \text{constant}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.6 Oefeningen Arbeid en Energie

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

A) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

B) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

C) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

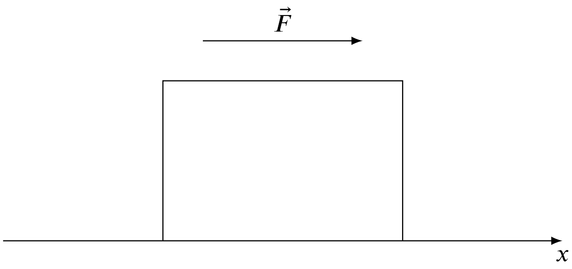
5.6.A Instapoefeningen

Oefening 5.6.1. Kan er door een kracht een van nul verschillende arbeid verricht worden op een voorwerp dat niet beweegt? Nee ✓

Uitwerking: Wanneer een voorwerp niet beweegt, is de verplaatsing nul en volgt uit de formule voor arbeid dat

$$W = Fd\cos(\theta) = F0\cos(\theta) = 0.$$

Oefening 5.6.2. Een vrouw duwt een hooibaal van 26 kg over een afstand van 3,9 m verder over de vloer van een schuur. Als ze een horizontale kracht van 88 N op het hooi uitoefent, hoeveel arbeid heeft ze dan geleverd? $W = 343$ J



Uitwerking:

De arbeid kan met de volgende vergelijking bepaald worden:

$$W = Fd = 88\text{ N} \cdot 3,9\text{ m} = 343\text{ J}$$

Oefening 5.6.3. Een doos wordt over een vloer getrokken aan een constante snelheid. Wat kan je zeggen over de arbeid van de wrijvingskracht?

Meerkeuze:

(a) De wrijving levert geen arbeid.

(b) De arbeid van de wrijving is negatief. ✓

(c) De arbeid van de wrijving is positief.

Uitwerking: De wrijving veroorzaakt een kracht met een tegengestelde zin aan de beweging. Hierdoor is de arbeid dus negatief.

Oefening 5.6.4. Een vrachtwagen heeft een snelheid van $v = 15$ m/s en een kinetische energie $K = 4,8 \cdot 10^5$ J.

1. De massa van de vrachtwagen is dan $m = 4.3 \cdot 10^3$ kg.

Uitwerking: De vergelijking voor de kinetische energie van de vrachtwagen kan omgevormd worden naar een vergelijking voor de massa:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow m = \frac{2K}{v^2} = \frac{2 \cdot 4,8 \cdot 10^5\text{ J}}{(15\text{ m/s})^2} = 4,3 \cdot 10^3\text{ kg}$$

2. Als de snelheid van de vrachtwagen verdubbelt, dan vermeerdert zijn kinetische energie met een factor 4.

Uitwerking: Het effect van het verdubbelen van een snelheid op de kinetische energie kan bepaald worden met de vergelijking voor kinetische energie. Stel dat snelheid v_a zich verhoudt tot snelheid v_b volgens de

CC BY-NC-SA 4.0

relatie $v_b = 2v_a$. Dan kan de verhouding tussen de kinetische energie K_b en K_a als volgt bepaald worden:

$$K_b = \frac{1}{2}mv_b^2 = \frac{1}{2}m(2v_a)^2 = 4\frac{1}{2}mv_a = 4K_a$$

Oefening 5.6.5. Een jongedame rijdt op een skateboard met een snelheid van 2 m/s. Nadat een kracht op haar inwerkt, verhoogt haar snelheid tot 3 m/s. Was de arbeid geleverd door de kracht

Meerkeuze:

(a) positief ✓

(b) negatief

(c) nul

Verklaar.

Uitwerking: Volgens het arbeid-energie theorema zal positieve arbeid op een object, een toename van de kinetische energie van het object tot gevolg hebben. De jongedame wint aan kinetische energie omdat haar snelheid verhoogt. De arbeid verricht door de kracht is dus positief. Wanneer negatieve arbeid zou verricht worden op de jongedame zou haar snelheid verlagen.

Oefening 5.6.6. Hoeveel arbeid is nodig om een jogger van 73 kg te versnellen van rust tot 7,7 m/s? $W_{net} = 2164$ J

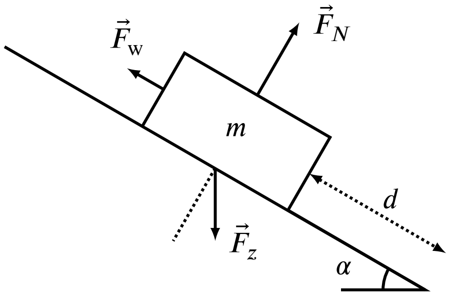
Uitwerking: De resulterende arbeid kan bepaald worden door de verandering van de kinetische energie te bepalen:

$$\begin{aligned} W_{net} &= \Delta K \\ &= K_f - K_i \\ &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 73 \text{ kg} \cdot (7,7 \text{ m/s})^2 - 0 \\ &= 2164 \text{ J} \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.6.B Standaardoefeningen

Oefening 5.6.7. Er werken drie krachten op de auto (massa m) in de figuur: de zwaartekracht $\vec{F}_z$, de normaalkracht $\vec{F}_N$ en een wrijvingskracht $\vec{F}_w$, ten gevolge van de lucht. De auto verplaatst zich over een afstand d. Bereken de netto-arbeid op de auto als je weet dat $\alpha = 30°$, $F_w = 1555$ N, $d = 20.0$ m, en $m = 1500$ kg.



$W = 116$ kJ

Uitwerking: Eerst wordt de arbeid ten gevolge van elke kracht berekend, waarna deze kunnen opgeteld worden om de netto-arbeid op de auto te verkrijgen. De arbeid door de normaalkracht wordt gegeven door:

$$W_N = F_N d\cos(\theta) = F_N d\cos(90°) = F_N d \cdot 0 = 0.$$

De arbeid door de luchtweerstand wordt gegeven door:

$$W_w = F_w d\cos(180°) = F_w d \cdot (-1) = -F_w d.$$

De arbeid door de zwaartekracht wordt gegeven door:

$$W_z = mgd\cos(90° - \alpha) = mgd\sin(\alpha).$$

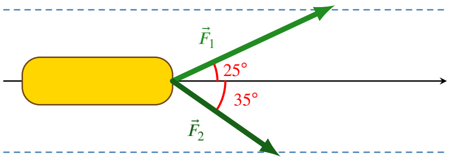
De resulterende arbeid is dan de som van de arbeid geleverd door elke kracht:

$$W_{net} = W_N + W_w + W_z = 0 - F_w d + mgd\sin(\alpha)$$

We vullen nu de gegevens in:

$$W_{net} = 0 - 1555\text{ N} \cdot 20\text{ m} + 1500\text{ kg} \cdot 9,81\frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 20\text{ m} \cdot \sin(30°) = 116\text{ kJ}$$

Oefening 5.6.8. Een boot met motorpech wordt door twee paarden op de oever voortgetrokken met een snelheid van $3,0\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Het eerste paard oefent een kracht uit van 1250 N en het tweede paard oefent een kracht uit van 920 N volgens de aangeduide vectoren. Welke arbeid verricht elk paard gedurende één uur op de boot?



1. $W_1 = 3.4 \cdot 10^6$ J

CC BY-NC-SA 4.0

5.6.B Standaardoefeningen

2. $W_2 = 2.3 \cdot 10^6$ J

Uitwerking: De paarden trekken gedurende een uur, en aangezien ze een snelheid van 3 km/h hebben, betekent dit dat ze een verplaatsing van 3 km maken. Voor het eerste paard vinden we dat

$$W_1 = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r} = 1250\,\text{N} \cdot 3,0 \cdot 10^3\,\text{m} \cdot \cos 25° = 3,4 \cdot 10^6\,\text{J}\,.$$

Analoog vinden we voor het tweede paard dat

$$W_2 = 920\,\text{N} \cdot 3,0 \cdot 10^3\,\text{m} \cdot \cos 35° = 2,3 \cdot 10^6\,\text{J}\,.$$

Oefening 5.6.9. Een vader en zijn jonge zoon lopen op een piste op zo'n manier dat ze beiden dezelfde kinetische energie bezitten. De zoon heeft een massa die vier keer kleiner is dan die van zijn papa. Wat is de verhouding van de snelheden van vader en zoon?

$$\frac{v_{\text{zoon}}}{v_{\text{vader}}} = 2$$

Uitwerking: We weten dat de kinetische energie van vader en zoon gelijk zijn, maar dat de vader vier keer zwaarder is dan zijn zoon. Zo berekenen we dat

$$\begin{aligned}
& K_z = K_v \\
\Leftrightarrow\ & \frac{K_z}{K_v} = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{m_z v_z^2/2}{m_v v_v^2/2} = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{m_z}{m_v}\left(\frac{v_z}{v_v}\right)^2 = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{4}\left(\frac{v_z}{v_v}\right)^2 = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{v_z}{v_v}\right)^2 = 4 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{v_z}{v_v} = 2
\end{aligned}$$

Bij het nemen van de wortel in de voorlaatste stap kunnen we zonder problemen de positieve wortel nemen, omdat we hier geïnteresseerd zijn in de grote van de snelheden, die altijd positief zijn.

Oefening 5.6.10. Een 'Acapulco cliff diver' duikt in het water vanop een hoogte van 46 m. De gravitationele potentiële energie neemt af met 25 000 J. Wat is het gewicht van de duiker, uitgedrukt in Newton? 543 N

Uitwerking: De verandering in potentiële energie wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}
\Delta U &= mgh_f - mgh_i \\
&= mg\left(h_f - h_i\right) \\
&= mg\,(0\ \text{m} - 46\ \text{m}) \\
&= -(46\ \text{m})\,mg
\end{aligned}$$

Het is gegeven dat de absolute waarde van deze verandering gelijk is aan 25 000 J. Zo kan het gewicht van

CC BY-NC-SA 4.0

5.6.B Standaardoefeningen

de duiker dan ook bepaald worden:

$$\begin{aligned} mg &= \frac{25000 \text{ J}}{46 \text{ m}} \\ &= 543 \text{ N} \end{aligned}$$

Oefening 5.6.11. Een doosje met een massa van $2,0$ kg staat op een tafel met een hoogte van 75 cm. Je neemt het doosje van de tafel en zet het op een rek op $2,25$ m boven de grond.

1. De arbeid die de zwaartekracht tijdens je hefbeweging heeft verricht op het doosje is $W = -29\ J$.

2. De arbeid die je spierkracht tijdens je hefbeweging heeft verricht op het doosje is $W = 29\ J$.

Uitwerking: We berekenen eerst de arbeid die de zwaartekracht levert op het doosje. De zin van de verplaatsing en de zwaartekracht zijn tegengesteld, en bijgevolg zal de arbeid negatief zijn.

$$\begin{aligned} W_z &= \vec{F}_z \cdot \Delta\vec{r} \\ &= \left(-mg\hat{j}\right) \cdot (2.25 \text{ m} - 0,75 \text{ m})\,\hat{j} \\ &= -(2,0 \text{ kg})\left(9,81 \text{ N/kg}\right)(1,5 \text{ m}) \\ &= -29 \text{ J} \end{aligned}$$

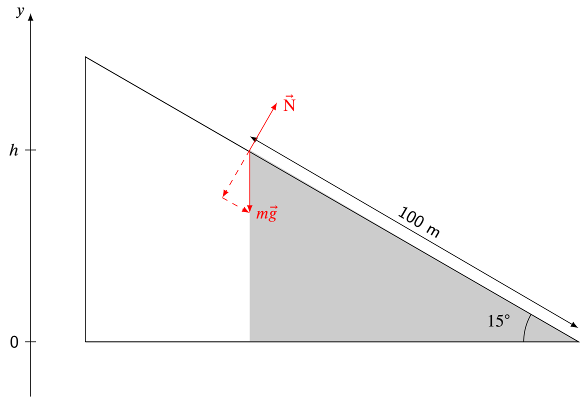
Aangezien het doosje in rust begint en in rust eindigt, is er geen verandering van kinetische energie. Het arbeid-energie theorema zegt ons dan dat da netto arbeid gelijk moet zijn aan 0. De enige andere kracht die arbeid levert op het doosje is de spierkracht, en bijgevolg is deze tegengesteld aan de arbeid geleverd door de zwaartekracht.

Oefening 5.6.12. Je skiet van een helling van 15 °. Als je een snelheid van 10 m/s hebt, laat je je 100 m langsheen de helling naar beneden glijden.

1. Neem aan dat de wrijving verwaarloosbaar is. Wat is dan je snelheid na 100 m? $v = 25$ m/s

2. Wat is je snelheid na 100 m als de kinetische wrijvingscoëfficiënt tussen de sneeuw en de skies 0,1 is? $v = 20$ m/s

Uitwerking: **1**



Voor de gearceerde driehoek geldt:

$$\sin(15°) = \frac{h}{100 \text{ m}} \Rightarrow h = (100 \text{ m}) \cdot \sin(15°)$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.6.B Standaardoefeningen

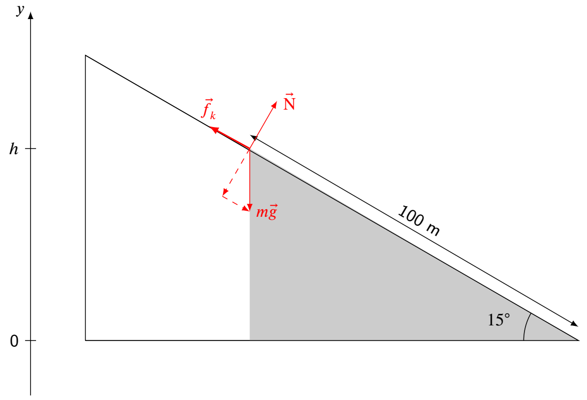
De wrijving wordt verwaarloosd en de normaalkracht levert geen arbeid, dus:

$$\Delta E = 0$$
of
$$E_f = E_i$$
$$\frac{1}{2}mv_f^2 - 0 = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh$$

Invullen van alle bekenden en vereenvoudigen geeft:

$$\begin{aligned} v_f^2 &= v_i^2 + 2gh \\ \Rightarrow v_f &= \sqrt{(10\ \text{m/s})^2 + 2 \cdot g \cdot (100\ \text{m}) \cdot \sin(15°)} \\ &\approx 25\ \text{m/s} \end{aligned}$$

subvraag 2



Uit de tweede wet van Newton volgt:

$$\text{N} = mg\cos(15°) \Rightarrow f_k = \mu_k \text{N} = mg\mu_k \cos(15°)$$

Hier geldt:

$$\Delta E = W_{\text{wrijving}} = f_k d \cos(180°) = -f_k d$$

Nu is:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_f - E_i \\ &= \left(\frac{1}{2}mv_f^2 + 0\right) - \left(\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh\right) \\ &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 - mg(100\ \text{m})\sin(15°) \end{aligned}$$

omdat er terug geldt:

$$h = (100\ \text{m})\sin(15°)$$

Aangezien $d = 100$ m, halen we uit $\Delta E = W_{\text{wrijving}}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 - mg(100\ \text{m})\sin(15°) &= -f_k(100\ \text{m}) \\ &= -(100\ \text{m})mg\mu_h \cos(15°) \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

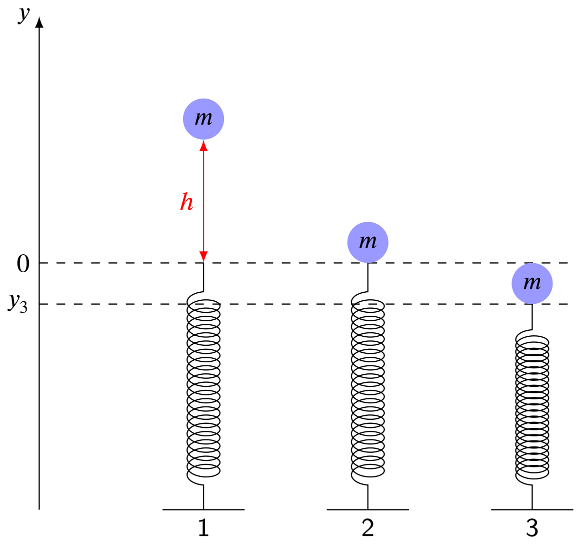
5.6.B Standaardoefeningen

Bijgevolg is:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}v_f^2 &= \frac{1}{2}v_i^2 + g(100 \text{ m})\sin(15°) - (100 \text{ m})g\mu_k\cos(15°) \\
\Rightarrow v_f^2 &= v_i^2 + (200 \text{ m})g\sin(15°) - (200 \text{ m})g\mu_k\cos(15°) \\
&= v_i^2 + (200 \text{ m})g\left(\sin(15°) - \mu_k\cos(15°)\right) \\
\Rightarrow v_f &= \sqrt{v_i^2 + (200 \text{ m})g\,(\sin(15°) - 0,1\cos(15°))} \\
&= \sqrt{(10 \text{ m/s})^2 + (200 \text{ m})g\,(\sin(15°) - 0,1\cos(15°))} \\
&\approx 20 \text{ m/s}
\end{aligned}$$

Oefening 5.6.13. Vanop welke hoogte moet een bal van 100 g vallen vanuit rust om een verticale veer (met veerconstante k = 70 N/m) in te drukken over een maximale afstand van 5 cm? $h =$ 0.04 m

Uitwerking: De beweging kan opgesplitst worden in twee delen. Het punt $y = 0$ in de figuur komt overeen met de rustlengte van de veer.



1 → 2

Enkel de zwaartekracht is werkzaam. Deze is een conservatieve kracht, waardoor er dus behoud is van mechanische energie:

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_2 \\
\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh &= \frac{1}{2}mv_2^2 + 0 \\
0 + mgh &= \frac{1}{2}mv_2^2 \\
mgh &= \frac{1}{2}mv_2^2
\end{aligned}$$

waarbij gebruik gemaakt werd van het feit dat $v_1 = 0$ m/s.

2 → 3

CC BY-NC-SA 4.0

5.6.B Standaardoefeningen

Nu zijn zowel de zwaartekracht als de veerkracht werkzaam. Beide zijn conservatief, dus is er behoud van mechanische energie.

$$E_2 = E_3$$
$$\frac{1}{2}mv_2^2 + 0 + 0 = \frac{1}{2}mv_3^2 + mgy_3 + \frac{1}{2}ky_3^2$$

Op dit moment geldt $v_3 = 0$ m/s en $y_3 = -0,05$ m. We kunnen dus concluderen dat:

$$\begin{aligned}
mgh &= \frac{1}{2}mv_2^2 \\
&= \frac{1}{2}mv_3^2 + mgy_3 + \frac{1}{2}ky_3^2 \\
&= 0 + mg(-0,05\text{ m}) + \frac{1}{2}k(-0,05\text{ m})^2 \\
\Leftrightarrow h &= \frac{mg(-0,05\text{ m}) + \frac{1}{2}k(-0,05\text{ m})^2}{mg} \\
&= -0,05\text{ m} + \frac{\frac{1}{2}k(-0,05\text{ m})^2}{mg} \\
&= -0,05\text{ m} + \frac{\frac{1}{2}(70\text{ N/m})(-0,05\text{ m})^2}{(0,100\text{ kg})(9,81\text{ m/s}^2)} \\
&= 0,04\text{ m}
\end{aligned}$$

Oefening 5.6.14. Je gooit een muntstukje met een massa van 5,5 g recht naar beneden vanaf een 35 m hoge brug. De beginsnelheid van het muntstukje is $4,0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Dan raakt het muntje het water met snelheid

$$v = 26.5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Uitwerking: We berekenen eerst de arbeid geleverd door de zwaartekracht. De arbeid is gegeven door $W = -mg \cdot \Delta h$, en zal positief zijn omdat het hoogteverschil negatief is. Zo vinden we dat

$$W = -5,5 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot 9,81\,\text{N/kg} \cdot (-35\,\text{m}) \approx 1,9\,\text{J}\,.$$

Volgens het arbeid-energie theorema is dit gelijk aan het verschil in kinetische energie. Dus is

$$K_2 = K_1 + W\,.$$

Zo vinden we dat

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_2^2 &= \frac{1}{2}mv_1^2 + W \\
\Leftrightarrow v_2 &= \sqrt{v_1^2 + 2W/m} \\
\Leftrightarrow v_2 &= 26,5\text{ m/s}\,.
\end{aligned}$$

Merk op dat we om dit uit te komen hebben verder gerekend met de exacte waarde van de arbeid (en dus niet 1.9 J), aangezien dit een tussenresultaat is en we pas op het einde afronden.

Oefening 5.6.15. Hoe groot moet het vermogen van een liftmotor zijn om een lift met een massa van 1000 kg in 50 s naar een hoogte van 100 m te brengen?

$$P_g = 1.96 \cdot 10^4\ \text{W}$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.6.B Standaardoefeningen

Uitwerking: De arbeid dat de liftmotor moet leveren is het tegengestelde van de arbeid geleverd door de zwaartekracht. Zo vinden we dat

$$W_l = 1000\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{g} \cdot 100\,\mathrm{m} = 9,81 \cdot 10^5\,\mathrm{J}\,.$$

Als de liftmotor deze arbeid moet leveren in 50 seconden vinden we dat

$$P = \frac{W_l}{\Delta t} = \frac{9,81 \cdot 10^5\,\mathrm{J}}{50\,\mathrm{s}} = 1,96 \cdot 10^4\,\mathrm{W}\,.$$

CC BY-NC-SA 4.0

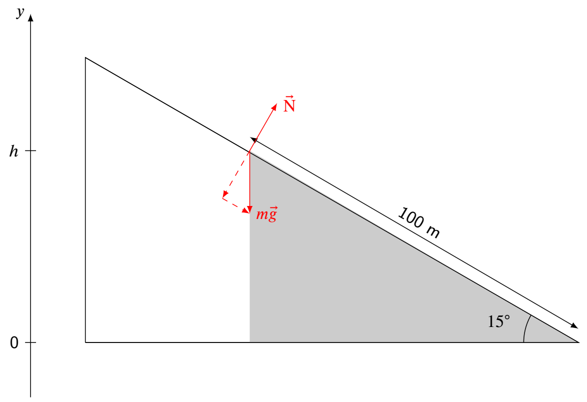
5.6.C Gevorderde oefeningen

Oefening 5.6.16. Je skiet van een helling van 15 °. Als je een snelheid van 10 m/s hebt, laat je je 100 m langsheen de helling naar beneden glijden.

1. Neem aan dat de wrijving verwaarloosbaar is. Wat is dan je snelheid na 100 m? $v = 25$ m/s

2. Wat is je snelheid na 100 m als de kinetische wrijvingscoëfficiënt tussen de sneeuw en de skies 0,1 is? $v = 20$ m/s

Uitwerking: 1



Voor de gearceerde driehoek geldt:

$$\sin(15°) = \frac{h}{100\ \mathrm{m}} \Rightarrow h = (100\ \mathrm{m}) \cdot \sin(15°)$$

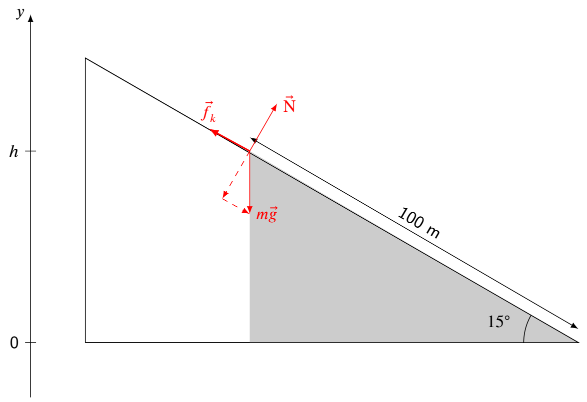
De wrijving wordt verwaarloosd en de normaalkracht levert geen arbeid, dus:

$$\Delta E = 0$$
$$\text{of}$$
$$E_f = E_i$$
$$\frac{1}{2}mv_f^2 - 0 = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh$$

Invullen van alle bekenden en vereenvoudigen geeft:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2gh$$
$$\Rightarrow v_f = \sqrt{(10\ \mathrm{m/s})^2 + 2 \cdot g \cdot (100\ \mathrm{m}) \cdot \sin(15°)}$$
$$\approx 25\ \mathrm{m/s}$$

subvraag 2



5.6.C Gevorderde oefeningen

Uit de tweede wet van Newton volgt:

$$N = mg\cos(15^\circ) \Rightarrow f_k = \mu_k N = mg\mu_k\cos(15^\circ)$$

Hier geldt:

$$\Delta E = W_{\text{wrijving}} = f_k d\cos(180^\circ) = -f_k d$$

Nu is:

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_f - E_i\\ &= \left(\frac{1}{2}mv_f^2 + 0\right) - \left(\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh\right)\\ &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 - mg(100\text{ m})\sin(15^\circ)\end{aligned}$$

omdat er terug geldt:

$$h = (100\text{ m})\sin(15^\circ)$$

Aangezien $d = 100$ m, halen we uit $\Delta E = W_{\text{wrijving}}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 - mg(100\text{ m})\sin(15^\circ) &= -f_k(100\text{ m})\\ &= -(100\text{ m})mg\mu_h\cos(15^\circ)\end{aligned}$$

Bijgevolg is:

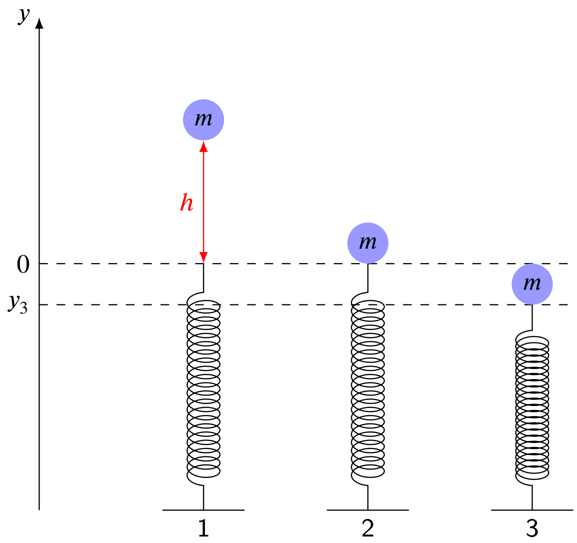
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}v_f^2 &= \frac{1}{2}v_i^2 + g(100\text{ m})\sin(15^\circ) - (100\text{ m})g\mu_k\cos(15^\circ)\\ \Rightarrow v_f^2 &= v_i^2 + (200\text{ m})g\sin(15^\circ) - (200\text{ m})g\mu_k\cos(15^\circ)\\ &= v_i^2 + (200\text{ m})g\left(\sin(15^\circ) - \mu_k\cos(15^\circ)\right)\\ \Rightarrow v_f &= \sqrt{v_i^2 + (200\text{ m})g(\sin(15^\circ) - 0,1\cos(15^\circ))}\\ &= \sqrt{(10\text{ m/s})^2 + (200\text{ m})g(\sin(15^\circ) - 0,1\cos(15^\circ))}\\ &\approx 20\text{ m/s}\end{aligned}$$

Oefening 5.6.17. Vanop welke hoogte moet een bal van 100 g vallen vanuit rust om een verticale veer (met veerconstante k = 70 N/m) in te drukken over een maximale afstand van 5 cm? $h = 0.04$ m

Uitwerking: De beweging kan opgesplitst worden in twee delen. Het punt $y = 0$ in de figuur komt overeen met de rustlengte van de veer.

CC BY-NC-SA 4.0

5.6.C Gevorderde oefeningen



1 → 2

Enkel de zwaartekracht is werkzaam. Deze is een conservatieve kracht, waardoor er dus behoud is van mechanische energie:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 \\ \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh &= \frac{1}{2}mv_2^2 + 0 \\ 0 + mgh &= \frac{1}{2}mv_2^2 \\ mgh &= \frac{1}{2}mv_2^2 \end{aligned}$$

waarbij gebruik gemaakt werd van het feit dat $v_1 = 0$ m/s.

2 → 3

Nu zijn zowel de zwaartekracht als de veerkracht werkzaam. Beide zijn conservatief, dus is er behoud van mechanische energie.

$$\begin{aligned} E_2 &= E_3 \\ \frac{1}{2}mv_2^2 + 0 + 0 &= \frac{1}{2}mv_3^2 + mgy_3 + \frac{1}{2}ky_3^2 \end{aligned}$$

Op dit moment geldt $v_3 = 0$ m/s en $y_3 = -0,05$ m. We kunnen dus concluderen dat:

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mv_2^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_3^2 + mgy_3 + \frac{1}{2}ky_3^2 \\ &= 0 + mg(-0,05\text{ m}) + \frac{1}{2}k(-0,05\text{ m})^2 \\ \Leftrightarrow h &= \frac{mg(-0,05\text{ m}) + \frac{1}{2}k(-0,05\text{ m})^2}{mg} \\ &= -0,05\text{ m} + \frac{\frac{1}{2}k(-0,05\text{ m})^2}{mg} \\ &= -0,05\text{ m} + \frac{\frac{1}{2}(70\text{ N/m})(-0,05\text{ m})^2}{(0,100\text{ kg})(9,81\text{ m/s}^2)} \\ &= 0,04\text{ m} \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.6.D Oefeningen Usolv-it

Oefening 5.6.18. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over arbeid en energie via het Usolv-it oefenplatform.

Oefening 5.6.19. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over behoud van energie via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Intro trillingen

In de kinematica bestudeer je de beweging van voorwerpen.

(a) Als een voorwerp een beweging uitvoert die zich na enige tijd herhaalt, spreken we van een **periodieke beweging**. Een voorbeeld hiervan is de eenparige cirkelvormige beweging van een paardje op een paardenmolen.

(b) Wanneer een systeem (object) een heen en weer gaande beweging uitvoert rond een punt, spreken we van een **trilling**. Voorbeelden hiervan zijn: een trilplaat in een fitnesscenter, een boorhamer, het vlies van een luidspreker... Een trilling is dus een periodieke beweging, die zich afspeelt rond een evenwichtspunt.

(c) Kan de trillingsbeweging beschreven worden door een sinusfunctie, dan spreken we van een **harmonische trilling**.

In dit hoofdstuk bestuderen we de wiskundige beschrijving van de harmonische trilling, de verschillende eigenschappen ervan en we staan ook stil bij de energie van een systeem dat een harmonische trilling uitvoert.

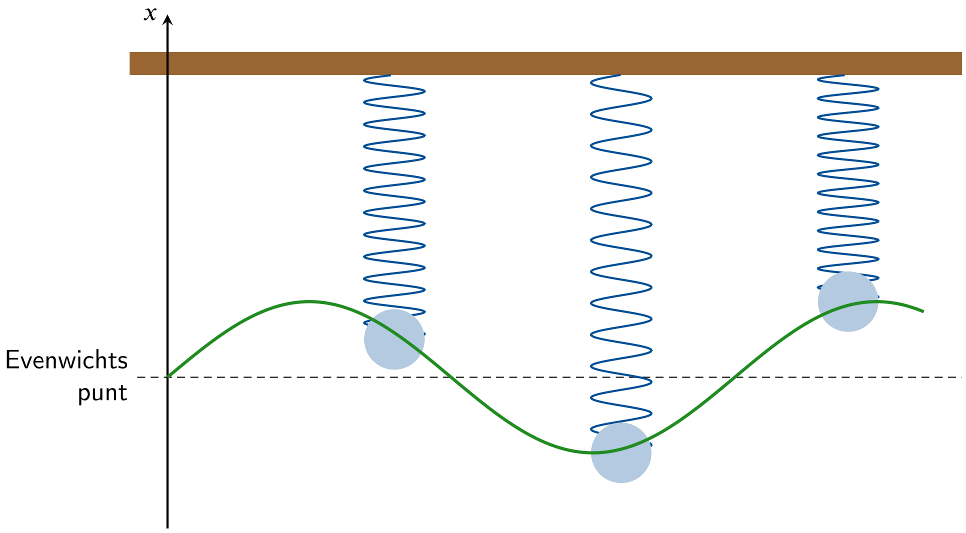
CC BY-NC-SA 4.0

6.2 De harmonische trilling

6.2.1 Definitie

We bekijken een massa aan een veer. Hangt de massa in rust aan de veer, dan bevindt zij zich in het evenwichtspunt van het massa-veer systeem. Als je de massa uit haar evenwichtspunt brengt en loslaat, voert ze een trilling uit rond het evenwichtspunt.

Voer je een x-as in zoals op de figuur, dan geeft de positie x de uitwijking van de massa aan, uitgedrukt in meter. De $x(t)$-functie noemt men de **trillingsvergelijking**.



Figuur 44 – Verticale trilling van een massa aan een veer.

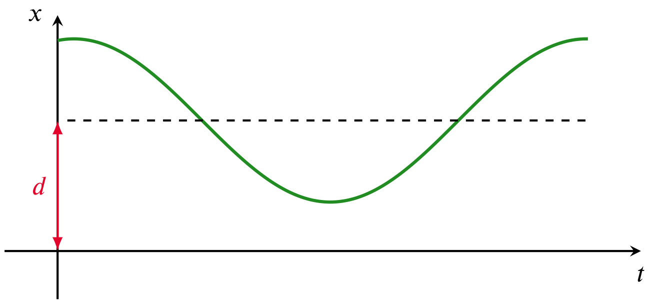
Een systeem voert een **harmonische trilling** uit als de trillingsvergelijking te schrijven is als een algemene sinusfunctie:

$$x(t) = a \cdot \sin(bt + c) + d.$$

Opmerking : in plaats van een sinus, kan er ook gekozen worden voor een cosinus in dit functievoorschrift. Wij werken hieronder verder met de keuze voor de sinus.

We bespreken nu de betekenis van a, b, c en d in dit functievoorschrift.

(a) d is de positie van het evenwichtspunt.



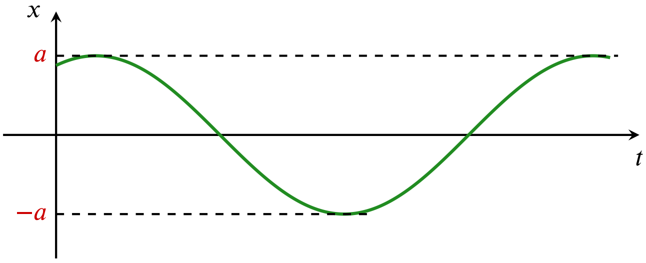
Tip : het is nuttig om bij de keuze van de x-as de oorsprong in het evenwichtspunt te kiezen, want dan wordt d gelijk aan nul. Er geldt dan dat:

$$x(t) = a \cdot \sin(bt + c).$$

CC BY-NC-SA 4.0

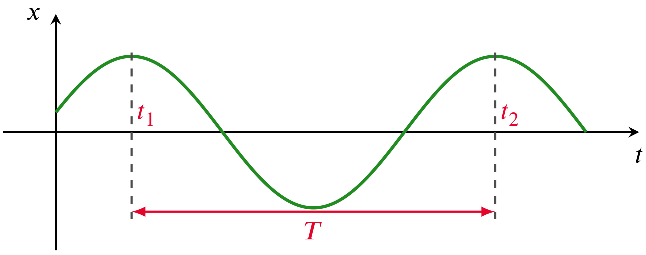
6.2 De harmonische trilling

(b) a is de maximale uitwijking t.o.v. het evenwichtspunt. Als $\sin(bt+c)=1$, is de uitwijking x positief, maximaal en gelijk aan $+a$. Als $\sin(bt+c)=-1$, is de uitwijking x negatief, maximaal en gelijk aan $-a$. We noemen a de **amplitude** van de trilling en noteren meestal A.



(c) b is niet rechtstreeks af te lezen uit de grafiek, maar bepaalt de periode. **De periode T is de tijdsduur van één volledige trillingsbeweging.** De uitwijking x bereikt haar positief maximum als $\sin(bt+c)=1$. Als dit de eerste maal het geval is op tijdstip t_1, dan is

$$b\cdot t_1+c=\frac{\pi}{2}(rad) \qquad \Rightarrow \qquad t_1=\frac{\frac{\pi}{2}-c}{b}.$$



Stel dat de uitwijking x de tweede maal haar positief maximum bereikt op het tijdstip t_2. Dan geldt

$$b\cdot t_2+c=\frac{\pi}{2}+2\pi \qquad \Rightarrow \qquad t_2=\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi-c}{b}.$$

Na het tijdsverloop t_2-t_1 herhaalt de trilling zich. Dat tijdsverloop is de periode T:

$$T=t_2-t_1=\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi-c}{b}-\frac{\frac{\pi}{2}-c}{b}=\frac{2\pi}{b}.$$

Bijgevolg is

$$b=\frac{2\pi}{T}$$

We zien nu dat b inderdaad de periode T bepaalt, maar dit op omgekeerd evenredige wijze. Als we deze uitdrukking herformuleren als

$$b=2\pi\cdot f$$

dan definiëren we zo de frequentie f van de trilling. **De frequentie f is het aantal trillingen per seconde (uitgedrukt in s^{-1} of Hz).** 1 Hertz komt overeen met één volledige trillingsbeweging per seconde. We noemen b de **pulsatie** van de trilling en noteren dit als ω (uitgedrukt in rad/s). Onthoud dus dat:

$$\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$$

of dus ook dat

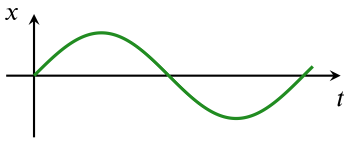
$$f=\frac{1}{T}$$

CC BY-NC-SA 4.0

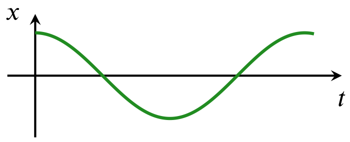
6.2 De harmonische trilling

(d) Ook c is niet rechtstreeks af te lezen uit de grafiek, maar bepaalt de positie en snelheid op tijdstip $t = 0$ s en wordt de **beginfase** φ_0 genoemd.

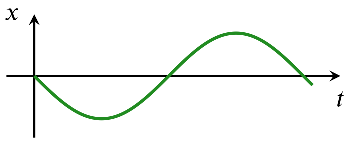
Indien $c = 0$ (rad) op $t = 0$ s, dan bevindt het voorwerp zich op $t = 0$ s in de oorsprong en beweegt het in de positieve zin van de x-as. Als $c = \frac{\pi}{2}$ bevindt het voorwerp zich op $t = 0$ s in het positief maximum. Indien $c = \pi$ (rad) op $t = 0$ s, dan bevindt het voorwerp zich op $t = 0$ s in de oorsprong en beweegt het in de negatieve zin van de x-as. Als $c = -\frac{\pi}{2}$ bevindt het voorwerp zich op $t = 0$ s in het negatief maximum.



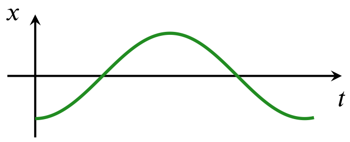
$c = 0$



$c = \frac{\pi}{2}$



$c = \pi$



$c = \frac{3\pi}{2}$

Opmerking : voor de bepaling van c is het wel degelijk van belang dat we hier voor een sinus gekozen hebben in het voorschrift van de trilling. Kiezen we een cosinus, dan zal c in elk van deze vier gevallen anders zijn ! Probeer zelf eens c te vinden in deze vier gevallen, bij de keuze van een cosinus in het trillingsvoorschrift.

Eigenschap 6.2.1. Een harmonische trilling wordt gekenmerkt door de amplitude A, de pulsatie ω, de beginfase φ_0 en de waarde d van het evenwichtspunt. Als we de oorsprong van de x-as in het evenwichtspunt leggen, wordt d nul, en wordt de trillingsvergelijking gegeven door:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0).$$

x is de uitwijking t.o.v. het evenwichtspunt; A is de maximale uitwijking t.o.v. het evenwichtspunt; ω is 2π maal het aantal trillingsbewegingen per tijdseenheid;

$\omega \cdot t + \varphi_0$ is de **fase** φ van de harmonische trilling;

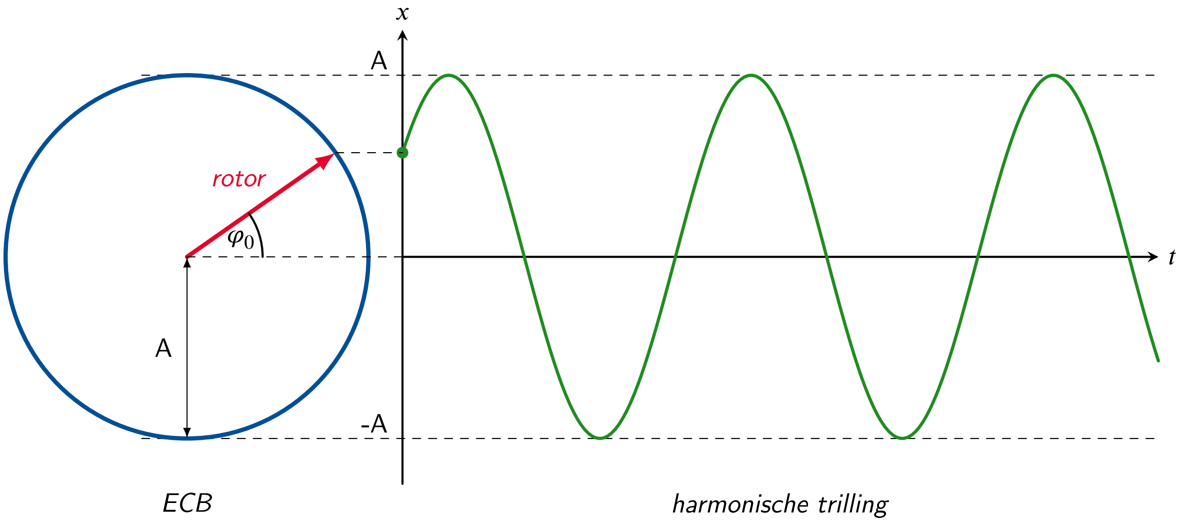
φ_0 is de fase op tijd nul.

Opmerking 6.2.1. De beginfase φ_0 wordt vaak verward met de beginuitwijking x_0. De beginfase is een hoek in radialen, terwijl de beginuitwijking de x-waarde is, in meter, op tijdstip $t = 0$. Het verband tussen de twee wordt duidelijk in de paragraaf hieronder over de link tussen een harmonische trilling en een eenparige cirkelbeweging.

CC BY-NC-SA 4.0

6.2.2 Link met de eenparige cirkelbeweging

De harmonische trilling kan in verband gebracht worden met de eenparige cirkelvormige beweging (ECB). Indien je de projectie van een ECB op een verticale as bekijkt, dan volgt het geprojecteerde punt een harmonische trilling.



Figuur 45 – Verband tussen de harmonische trilling en een eenparige cirkelvormige beweging.

Met behulp van de cirkel die je naast de verticale as tekent, kan je de fase φ en de beginfase φ_0 visueel voorstellen. De hoek tussen de horizontale en de rotor (roterende vector) die overeenkomt met de uitwijking op een willekeurig tijdstip t, is φ, en die hoek op tijdstip $t = 0$ is dan uiteraard gelijk aan de beginfase φ_0.

6.2.3 Trillingen in fase en in tegenfase

We beschouwen twee harmonische trillingen met dezelfde pulsatie ω:

$$x_1(t) = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{01}) = A_1 \cdot \sin \varphi_1,$$

$$x_2(t) = A_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{02}) = A_2 \cdot \sin \varphi_2.$$

Het **faseverschil** $\Delta\varphi$ tussen de twee trillingen is:

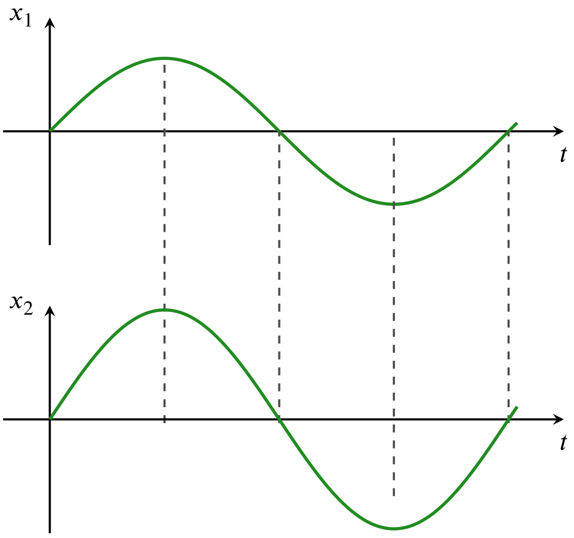
$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega \cdot t + \varphi_{02} - (\omega \cdot t + \varphi_{01}) = \varphi_{02} - \varphi_{01}.$$

We bekijken twee speciale gevallen (met $n \in \mathbb{Z}$):

(a)
$$\Delta\varphi = n \cdot 2\pi.$$

De twee trillingen zijn **in fase**: de twee systemen passeren op hetzelfde ogenblik het evenwichtspunt en bewegen dan ook in dezelfde zin. Ze bereiken op hetzelfde ogenblik hun positief maximum.

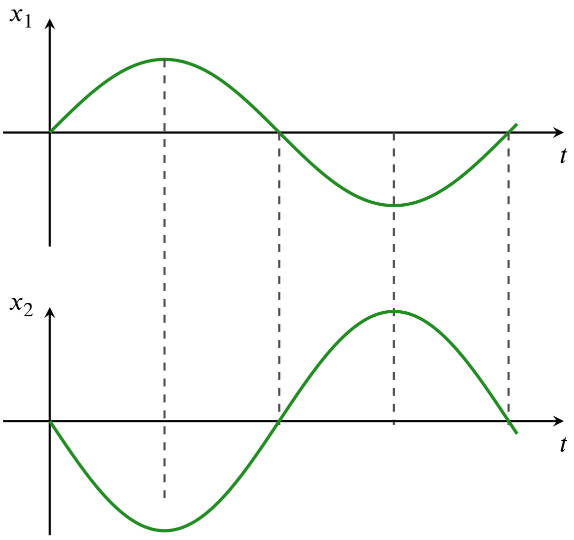
CC BY-NC-SA 4.0



(b)

$$\Delta\varphi = (2n+1)\cdot\pi.$$

De twee trillingen zijn dan **in tegenfase**: de twee systemen passeren op hetzelfde ogenblik het evenwichtspunt maar bewegen dan in tegengestelde zin. Als het ene systeem zijn positief maximum bereikt, is het andere systeem in zijn negatief maximum.



Definitie 6.2.1. Twee harmonische trillingen met dezelfde pulsatie zijn

- **in fase** als het faseverschil gelijk is aan $n\cdot 2\pi$;
- **in tegenfase** als het faseverschil gelijk is aan $(2n+1)\cdot\pi$. $(n\in\mathbb{Z})$

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Snelheid, versnelling, kracht en eigenfrequentie van een harmonische trilling

6.3.1 Snelheid

We bekijken een harmonische trilling waarvoor $\varphi_0 = 0$:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

De snelheid v_x op het ogenblik t wordt gegeven door

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A \cdot \sin(\omega \cdot t)\right) \\ &= A\cos(\omega \cdot t) \cdot \omega = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t). \end{aligned}$$

Op de $v_x(t)$-grafiek zie je dat de snelheid nul is als het systeem zich in de uiterste punten bevindt, dus als de uitwijking gelijk is aan $+A$ of $-A$. Op deze uiterste punten keert het object om en is dan momentaan in rust, of dus : de snelheid wordt daar nul. De grootte van de snelheid is daarentegen (positief of negatief) maximaal als het systeem het evenwichtspunt passeert.

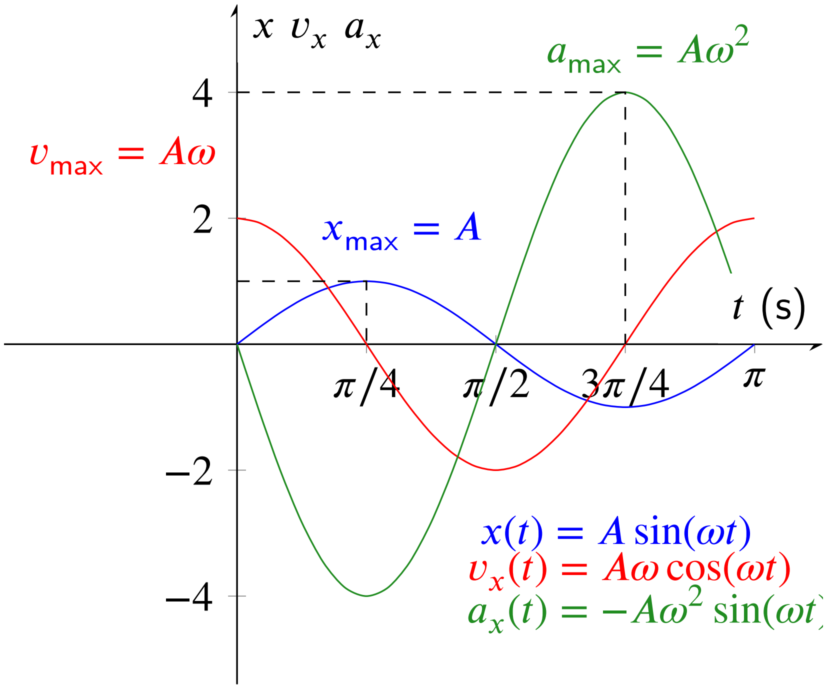
6.3.2 Versnelling

De versnelling a_x wordt gegeven door

$$\begin{aligned} a_x(t) &= \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)\right) \\ &= -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \omega = -A \cdot \omega^2 \sin(\omega \cdot t) \end{aligned}$$

De versnelling is nul als de snelheid (positief of negatief) maximaal is. Dat is in het evenwichtspunt. De grootte van de versnelling is maximaal als de snelheid nul is. Dat is in de uiterste punten.

Volgende figuur geeft de positie, snelheid en versnelling van een harmonische trilling weer in eenzelfde grafiek. De gebruikte waarden zijn $A = 1, \omega = 2$. Hierop is ook duidelijk te zien dat de extrema van de positie en versnelling samenvallen, terwijl de extrema van de snelheid voorkomen wanneer de positie en versnelling nul zijn.



CC BY-NC-SA 4.0

6.3.3 Kracht

Voor de resulterende kracht $\vec{F}$ op het systeem geldt volgens de tweede wet van Newton: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Projecteren op de x-as geeft

$$\begin{aligned} F_x &= m \cdot a_x \\ &= -m \cdot \omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega t) \end{aligned}$$

En omdat $x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$, is

$$F_x(t) = -m \cdot \omega^2 x(t).$$

De constante $m \cdot \omega^2$ noemen we de elasticiteitsconstante:

$$\varepsilon = m \cdot \omega^2$$

en dus

$$F_x(t) = -\varepsilon \cdot x(t).$$

Uit deze formule volgt:

(a) de resulterende kracht die inwerkt op een systeem dat een harmonische trilling uitvoert, is tegengesteld aan de uitwijking (min-teken!) en wijst dus altijd naar het evenwichtspunt: daarom noemen we de kracht een **terugroepkracht**. Hoe groter de elasticiteitsconstante, hoe groter de terugroepkracht.

(b) de terugroepkracht is op elk moment recht evenredig met de uitwijking. Hoe groter de uitwijking, hoe groter de kracht. Zo'n kracht noemen we daarom ook wel een **elastische kracht**.

6.3.4 De eigenfrequentie van een trillend systeem

Uit $\varepsilon = m \cdot \omega^2$ en $\omega = 2\pi f$ volgt

$$\varepsilon = m \cdot (2\pi f)^2$$

en dus

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}.$$

De frequentie waarmee een systeem trilt, is de **eigenfrequentie** f van een systeem. Ze hangt af van de massa van het trillend systeem en van de elasticiteitsconstante.

(a) Hoe groter ε, hoe groter de eigenfrequentie van de trilling. Dat merk je bv. bij een gitaarsnaar: bij een sterk opgespannen snaar is de terugroepkracht groot. De elasticiteitsconstante ε is dan groot. Uit de formule volgt dat de frequentie hoog is. Daarom hoor je een hogere toon als je een snaar meer opspant.

(b) Hoe groter m, hoe lager de eigenfrequentie en dus de toon. Daarom produceren voorwerpen met een grote massa lagere tonen, dan voorwerpen met een kleinere massa (viool ↔ contrabas ; picolo ↔ dwarsfluit, ...).

Eigenschap 6.3.1. Als een systeem met massa m een harmonische trilling uitvoert, is de resulterende kracht op het systeem elastisch:

$$F_x(t) = -\varepsilon \cdot x(t)$$

met ε de elasticiteitsconstante (eenheid N/m).

De eigenfrequentie van het systeem is $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

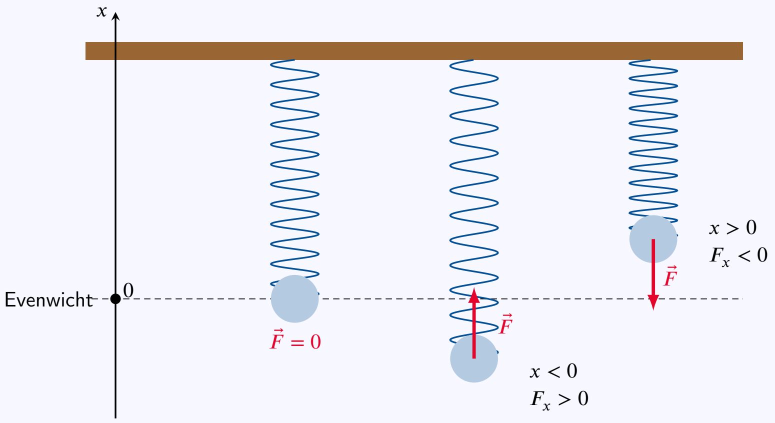
6.4 Voorbeelden

6.4.1 Trilling van een verticale veer

Voorbeeld 6.4.1 (Trilling van een verticale veer)**.** Indien het trillend systeem een verticaal (dwz hangend of staand) massa-veer systeem is, is de elasticiteitsconstante gelijk aan de veerconstante k van de veer. We bekomen dan dat

$$F_x(t) = -k \cdot x(t).$$

De resulterende kracht op de massa is de vectorsom van de zwaartekracht en de veerkracht, en wijst op elk ogenblik naar het 'nieuwe' evenwichtspunt, dat iets lager zal liggen dan het 'oude' evenwichtspunt, namelijk de plaats waar de veer haar normale lengte heeft.



Figuur 46 – De resulterende kracht wijst steeds naar het evenwichtspunt.

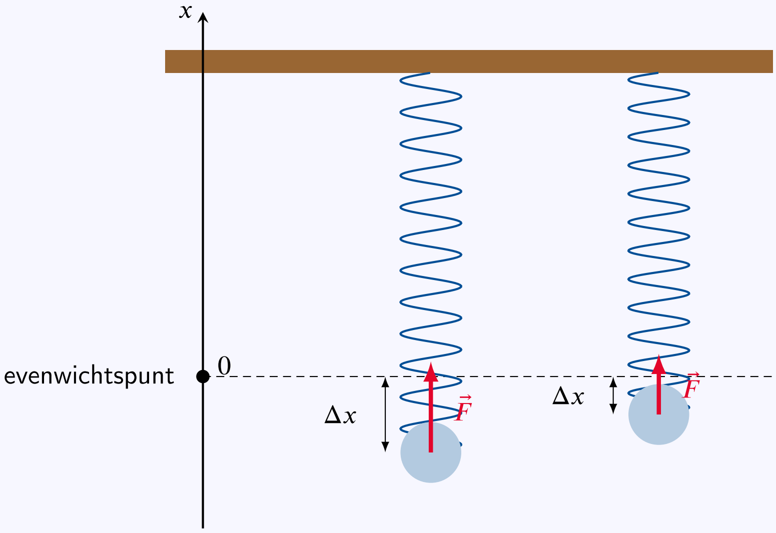
Hierin is x de uitwijking uit evenwicht, zodat als we enkel groottes bekijken, we bekomen dat

$$F(t) = k \cdot |x(t)| \,,$$

Hieruit blijkt dat de resulterende kracht, bestaande uit zwaartekracht en veerkracht, elastisch mag genoemd worden. De veerkracht schreven we vroeger reeds als de wet van Hooke: $F_v = k \cdot |\Delta\ell|$. Hierin is F_v de veerkracht en $\Delta\ell$ de uitwijking uit evenwicht (waar de veer haar normale lengte heeft). De veerkracht zelf is dus ook een elastische kracht.

CC BY-NC-SA 4.0

6.4 Voorbeelden



Figuur 47 – De resulterende kracht is evenredig met de uitwijking Δx uit het 'nieuwe' evenwichtspunt.

Voor de eigenfrequentie van het massa-veer-systeem zien we dat:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

De frequentie waarmee de massa trilt, hangt af van de veerconstante k en van de massa m.

(a) Hoe groter de veerconstante, hoe groter de frequentie waarmee het systeem trilt.

(b) Hoe groter de massa, hoe kleiner de frequentie.

Opmerking 6.4.1. (a) Bij een horizontaal trillende veer is de resulterende kracht op de veer gelijk aan enkel de veerkracht. De elastische kracht is dus gelijk aan de veerkracht.

(b) Zoals hiervoor aangegeven is bij een verticaal trillende veer de resulterende kracht niet meer gelijk aan de veerkracht alleen. Ze is de som van de veerkracht en de zwaartekracht. Op de bovenstaande figuren werd de resulterende kracht weergegeven.

6.4.2 Snaartrilling

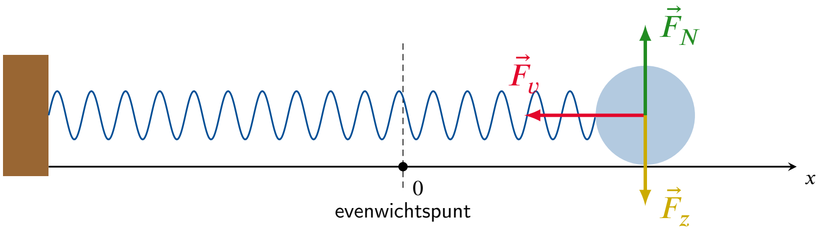
Voorbeeld 6.4.2 (Een trillende snaar)**.** Bepaal de frequentie van de trillende snaar van een gitaar met een massa van $10,0$ g. De elasticiteitsconstante bedraagt $19,1 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Uitwerking: We veronderstellen dat de snaar een harmonische trilling uitvoert. De eigenfrequentie van dit trillend systeem wordt gegeven door:

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\text{m}}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{19,1 \cdot 10^3\ \text{N/m}}{0,0100\ \text{kg}}} = 220\ \text{Hz}.$$

6.5 Energie van een systeem dat een harmonische trilling uitvoert

Beschouw een massa die een horizontale trilling uitvoert waarbij de wrijving verwaarloosbaar is. Op de massa werken drie krachten: de zwaartekracht $\vec{F}_z$, de normaalkracht $\vec{F}_N$ en de veerkracht $\vec{F}_v$.



Figuur 48 – Krachten bij een horizontale trilling.

De normaalkracht is de enige niet-conservatieve kracht en deze levert geen arbeid omdat deze kracht loodrecht op de verplaatsing staat: de niet-conservatieve arbeid W_{NC} is dus gelijk aan nul.

Volgens de wet van **behoud van mechanische energie** geldt dan:

$$E_{\text{mech}}(1) = E_{\text{mech}}(2)$$

We gaan dit na door de mechanische energie van de trillende massa op een bepaald tijdstip t te beschouwen.

De positie van de massa m op een bepaald ogenblik is

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t)\,.$$

De snelheid van de massa m op dat ogenblik is dus

$$v_x(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)\,.$$

De kinetische energie is

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}}(t) &= \frac{1}{2} m \cdot [v(t)]^2 \\ &= \frac{1}{2} m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t)\,. \end{aligned}$$

Vermits

$$\omega = 2\pi f \qquad \text{en} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

volgt dat

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Voor de kinetische energie bekomen we nu dat

$$E_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \cdot \frac{k}{m} \cdot \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} \cdot A^2 \cdot k \cdot \cos^2(\omega t)\,.$$

Op het beschouwde tijdstip is de uitwijking van de massa t.o.v. het evenwichtspunt gelijk aan $\Delta\ell$. Bij de harmonische trilling hebben we die uitwijking x genoemd, met

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)\,.$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Energie van een systeem dat een harmonische trilling uitvoert

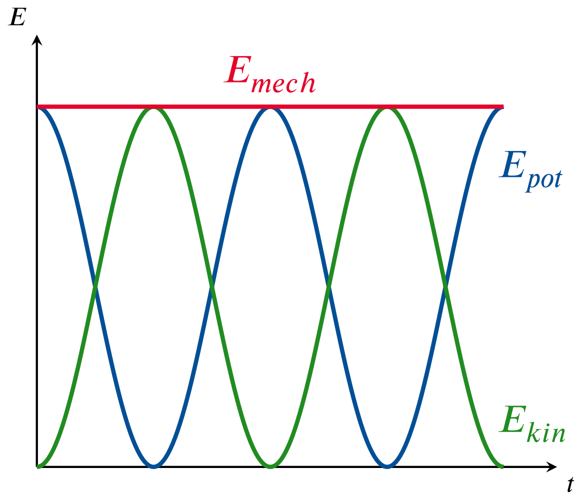
De potentiële energie van de veer is bijgevolg

$$E_p(t) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta\ell)^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega t).$$

Voor de mechanische energie bekomen we nu

$$\begin{aligned} E_{\text{mech}}(t) &= E_{\text{kin}}(t) + E_p(t) \\ &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega t) \\ &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot \left[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \end{aligned}$$

We bekomen inderdaad dat de mechanische energie van de massa die aan een veer een horizontale harmonische trilling uitvoert, constant is en dus behouden blijft.



Figuur 49 – De mechanische energie is bij een harmonische trilling van een massa-veersysteem constant.

We hadden het hierboven over een massa-veersysteem. Voor andere harmonisch trillende systemen kan men ook **algemeen** aantonen dat:

$$E_{mech}(t) = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot A^2.$$

Vermits $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}$ is dus

$$E_{mech}(t) = 2\pi^2 \cdot m \cdot f^2 \cdot A^2.$$

De mechanische energie van een systeem dat een harmonische trilling uitvoert, is afhankelijk van de amplitude en de frequentie:

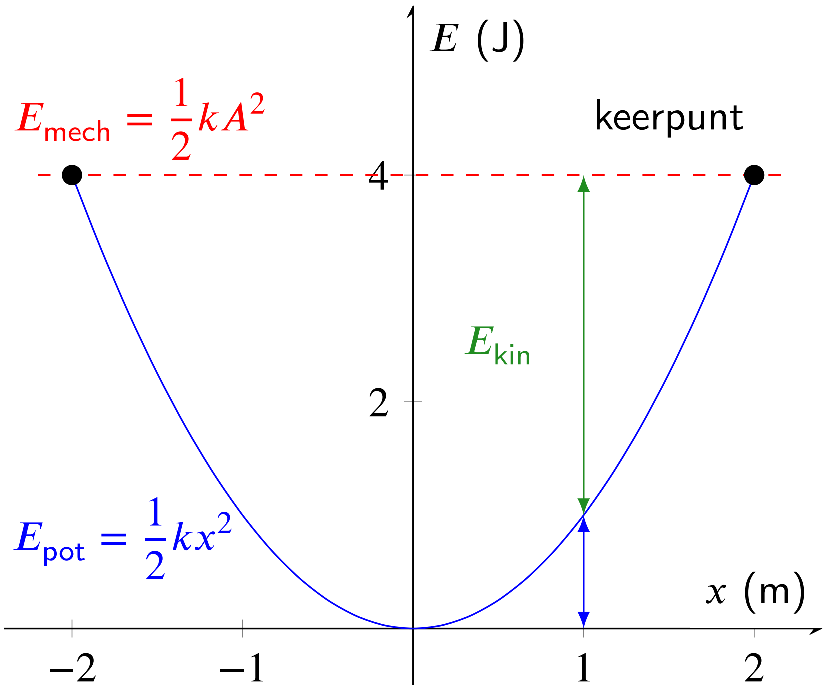
(a) Hoe groter de amplitude, hoe groter de mechanische energie van het systeem.

(b) Hoe groter de frequentie, hoe groter de mechanische energie van het trillende systeem.

We kunnen de mechanische energie van de harmonische trilling ook weergeven als functie van de (1D) positie langs de x-as. In volgende figuur is $A = 2$ m en $k = 2$ N/m.

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Energie van een systeem dat een harmonische trilling uitvoert



De blauwe curve geeft de potentiële energie weer als functie van de positie: de hoogte van de curve komt dus overeen met E_{pot}. In evenwicht is de potentiële energie nul. De totale mechanische energie E_{mech} is behouden, en dus constant als functie van de positie: deze is weergegeven in het rood. Het verschil tussen de totale energie en de potentiële energie is de kinetische energie. Dit is weergegeven met de groene dubbele pijl. Deze is in evenwicht maximaal, maar op de uiteinden nul.

Voorbeeld 6.5.1. Als een systeem dat een harmonische trilling uitvoert $3,0$ keer zoveel energie heeft als een tweede dat met gelijke frequentie en massa trilt, wat is dan de verhouding tussen de beide amplitudes?

Uitwerking: Voor de energie kunnen we schrijven dat

$$\begin{aligned} E_{mech}(1) &= 3 \cdot E_{mech}(2) \\ 2\pi^2 \cdot m \cdot f^2 \cdot A_1^2 &= 3 \cdot 2\pi^2 \cdot m \cdot f^2 \cdot A_2^2 \end{aligned}$$

Hieruit volgt voor de amplitudes dat

$$\begin{aligned} A_1^2 &= 3 \cdot A_2^2 \\ \frac{A_1}{A_2} &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

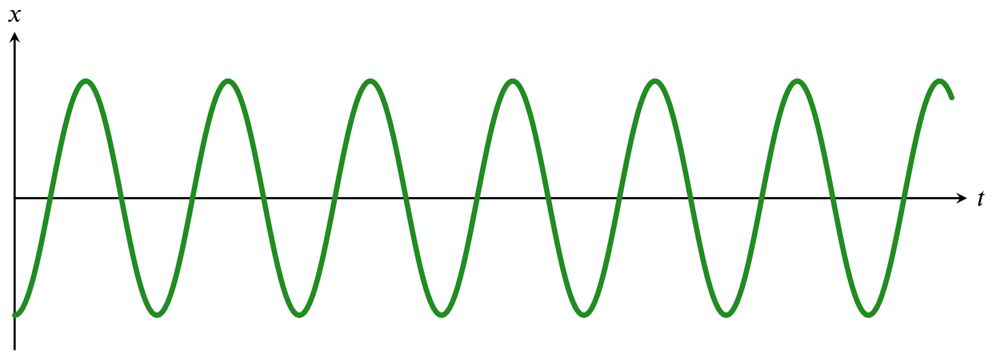
CC BY-NC-SA 4.0

6.6 Soorten trillingen

6.6.1 De vrije harmonische trilling

Als een voorwerp een trilling uitvoert en enkel onderhevig is aan een elastische kracht, voert het voorwerp een harmonische trilling uit. We spreken dan van een spontane of **vrije harmonische trilling**. De trillingsvergelijking wordt gegeven door een zuivere sinusfunctie.

De amplitude is op elk ogenblik even groot. De frequentie waarmee het systeem trilt, is $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}$.



Figuur 50 – De vrije harmonische trilling.

6.6.2 De gedempte harmonische trilling

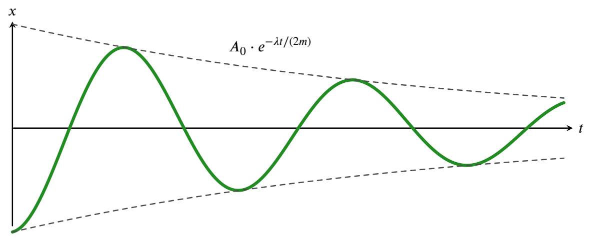
Een vrije harmonische trilling kan in realiteit niet bestaan omdat er er op een bewegend systeem steeds wrijvings- of weerstandskrachten inwerken. In een trillende veer wordt o.a. warmte geproduceerd, waardoor de mechanische energie van het systeem afneemt: de uitwijking wordt na verloop van tijd steeds kleiner, het systeem voert een **gedempte harmonische trilling** uit.

Vergelijken we een gedempte met een niet-gedempte trilling, dan vinden we twee verschillen.

(a) De amplitude $A(t)$ is dan geen constante meer, maar volgt een dalende exponentiële functie.

(b) De trillingsfrequentie f' is (wel opnieuw een constante, maar) gedaald naar een lagere waarde (noem f') dan de ongedempte frequentie f. Uiteraard kunnen we hetzelfde zeggen over de pulsatie ω'.

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t/2m} \cdot \sin\left(\omega' \cdot t + \varphi_0\right).$$



Figuur 51 – De gedempte harmonische trilling.

De factor $A_0 \cdot e^{-\lambda t/2m}$ komt overeen met de amplitude. Hierin bepaalt λ de demping. Hoe groter λ, hoe sterker de demping is, en hoe sneller de amplitude afneemt.

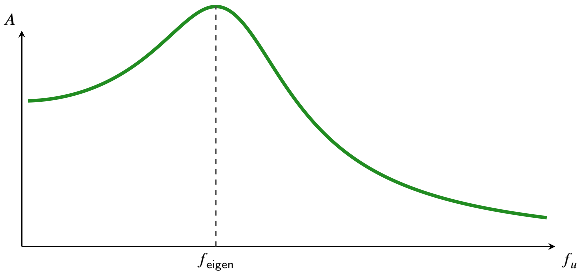
CC BY-NC-SA 4.0

6.6.3 De gedwongen harmonische trilling

Het energieverlies (en dus amplitudeverlies) bij een gedempte harmonische trilling kan gecompenseerd worden als er een uitwendige kracht op het systeem inwerkt. Op die manier kan je toch een blijvende harmonische trilling realiseren. Bekijk bv. een kindje op een schommel: als je af en toe een duwtje in de rug geeft, blijft het kindje in beweging.

Veronderstel dat de uitwendige kracht ook periodisch is in de tijd met frequentie f_u. Na enige tijd zal het systeem harmonisch trillen met de frequentie f_u van de uitwendige kracht. Vanaf dan blijft de amplitude constant en verloopt de trilling ongedempt. Het energieverlies door de wrijving wordt gecompenseerd door de uitwendige kracht.

Als de frequentie van de uitwendige kracht overeenkomt met de **resonantiefrequentie** van het gedempte massa-veer systeem (en als de demping niet te sterk is) blijkt de amplitude van de harmonische trilling erg groot te zijn. Men spreekt dan van **resonantie**. De resonantiefrequentie van een gedempt harmonisch trillend systeem ligt in de buurt van (namelijk iets lager dan) de eerder gedefinieerde **eigenfrequentie** van het systeem. Omdat het verschil tussen beide vaak klein is, benaderen we de resonantiefrequentie in wat volgt steeds door de eigenfrequentie. Bij resonantie is de overdracht van energie van het uitwendige aandrijfsteem naar het massa-veer systeem maximaal. Zoals het volgende voorbeeld aangeeft, is een resonantiefenomeen niet steeds gewenst.



Figuur 52 – Als de frequentie van de uitwendige kracht f_u precies gelijk is aan de resonantiefrequentie f_{reson}, treedt resonantie op. De resonantiefrequentie kan benaderd worden door de eigenfrequentie van het systeem.

Voorbeeld 6.6.1. In 1940 stortte de Tacoma Narrows Bridge (Washington) neer. Dit was een hangbrug. De wind zorgde blijkbaar voor een periodieke kracht waarvan de frequentie overeenkwam met de eigenfrequentie. De splinternieuwe brug kwam daardoor in resonantie en stortte in.

Figuur 53 – Instorting van de Tacoma bridge (bron: https://www.businessinsider.com/biggest-structural-failures-disasters-history-2019-11?r=US&IR=T).

CC BY-NC-SA 4.0

6.7 Oefeningen Trillingen

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

A) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

B) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

C) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

6.7.A Instapoefeningen

Oefening 6.7.1. Het vlies van een luidspreker trilt met een amplitude van $A = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ m en een frequentie van 262 Hz. Dat komt overeen met een lage do op een piano. Bereken de pulsatie van de trilling en de maximumsnelheid van het vlies van de luidspreker.

$$\omega = 1650 \text{ rad/s}$$

$$v_{max} = 0.20 \text{ m/s}$$

Uitwerking: De pulsatie van de trilling wordt gegeven door $\omega = 2\pi \cdot f$

Bijgevolg is $\omega = 2\pi \cdot 262 \text{ Hz} = 1650 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Voor de maximumsnelheid geldt dat $v_{max} = \omega \cdot A$ waaruit volgt dat $v_{max} = 1650 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0{,}20 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Oefening 6.7.2. Als de schokdempers van een auto versleten zijn, zal de auto bij de kleinste schok door bijvoorbeeld een put in de weg, een trilling uitvoeren. Bereken de frequentie en de periode van zo'n trilling als je weet dat de totale massa van de auto gelijk is aan 1250 kg en de veerconstante van het veringssysteem van de auto gelijk is aan $6,65 \cdot 10^4$ N/m.

$$f = 1.16 \text{ Hz}$$

$$T = 0.862 \text{ s}$$

Uitwerking: De frequentie van de trillingen van de auto kunnen we bepalen via de eigenfrequentie van een harmonische trilling $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Aangezien de massa van de auto en de veerconstante gegeven zijn, kunnen we frequentie eenvoudig berekenen:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6,65 \cdot 10^4 \text{N/m}}{1250 \text{kg}}} = 1,16 \text{Hz}$$

Hieruit volgt dat de periode gelijk is aan

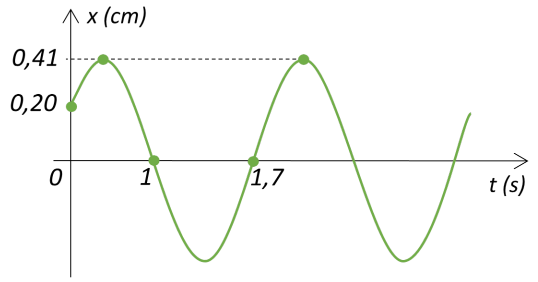
$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1,16 \text{Hz}} = 0,862 \, s$$

De frequentie van de trilling is $1,16$ Hz en de periode is $0,862 \, s$

Oefening 6.7.3. Onderstaande figuur geeft de uitwijking van een kleine massa $m = 4{,}5 \ g$ aan het uiteinde van een veer, als functie van de tijd weer. Op de figuur zijn een aantal punten aangeduid. Leid uit deze gegevens de veerconstante van de veer af.

CC BY-NC-SA 4.0

6.7.A Instapoefeningen



Figuur 54 – Trilling van een kleine massa aan een veer

$$k = 0.090\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Uitwerking: De periode van de trilling wordt gegeven door $T = \frac{1}{f}$ met de frequentie gelijk aan $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$
Bijgevolg is $k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot m$

We lezen op de figuur af dat $T = 1{,}4$ s waaruit volgt dat $k = \left(\frac{2\pi}{1{,}4\ \text{s}}\right)^2 \cdot 0{,}0045\ \text{kg} = 0{,}090\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$

Oefening 6.7.4. Bepaal de maximale snelheid van de massa waarvoor de trilling weergegeven is in bovenstaande figuur.

$$v = 0.018\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Uitwerking: De maximale snelheid wordt gegeven door $v_{max} = A \cdot \omega$

Voor een harmonische trilling geldt $\omega = \frac{2\pi}{T}$. We lezen op de figuur af dat $A = 0,0041$ m en $T = 1,4$ s waaruit volgt dat $v_{\text{max}} = A \cdot \frac{2\pi}{T} = 0{,}0041\ \text{m} \cdot \frac{2\pi}{1{,}4\ \text{s}} = 0{,}018\frac{\text{N}}{\text{m}}$

CC BY-NC-SA 4.0

6.7.B Instapoefeningen

Oefening 6.7.5. Een voorwerp voert een horizontale harmonische trilling uit met een amplitude van 2 cm en een frequentie van 2 Hz. Op $t = 0$ s beweegt het voorwerp door het evenwichtspunt, terwijl het naar rechts beweegt. Noteer het voorschrift van de bewegingsvergelijking $x(t)$, als we de x-as naar rechts kiezen.

Uitwerking: Algemeen wordt de bewegingsvergelijking voor een harmonische trilling gegeven door

$$x(t) = A \sin\left(\omega t + \varphi_0\right) .$$

Hier is A de amplitude, die dus gelijk is aan 2 cm in dit geval. De frequentie f is 2 Hz, waaruit we de hoekfrequentie kunnen halen met de formule $\omega = 2\pi f = 4\pi$ rad/s. Nu moeten we dus enkel nog de beginfase φ_0 bepalen. Omdat het voorwerp door het evenwichtspunt beweegt op $t = 0$, moet $x(t = 0) = 0$, wat betekent dat $\sin(\varphi_0) = 0$. Bijgevolg is φ_0 gelijk aan 0 of π. We weten ook dat het voorwerp naar rechts beweegt op dit moment, wat overeenkomt met de positieve zin van de x-as. Dit betekent dat de snelheid, i.e. de afgeleide van de positie, positief moet zijn op $t = 0$. We berekenen dat

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos\left(\omega t + \varphi_0\right) ,$$

waaruit we dus halen dat $v_x(t = 0) = A\omega \cos\left(\varphi_0\right)$. Omdat zowel A als ω positief zijn, moet dus $\cos\varphi_0$ ook positief zijn indien we een positieve snelheid willen bekomen. Onze opties voor φ_0 waren 0 en π, maar $\cos\pi = -1 < 0$, terwijl dat $\cos 0 = 1 > 0$, zodat we $\varphi_0 = 0$ nodig hebben. Het volledige voorschrift is dus $x(t) = 2\text{ cm} \cdot \sin\left(4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t\right)$ We weten inderdaad dat een sinusfunctie zonder beginfase, in de oorsprong start, en stijgend.

Oefening 6.7.6. Een veer hangt verticaal aan het plafond. Als je er een massa aan hangt, rekt de veer 2,0 cm uit waardoor ze een nieuw evenwichtspunt bereikt. Als je nu zachtjes aan de massa trekt en dan weer los laat, wat zal dan de frequentie van de trilling zijn?

$$f = 3.5 \text{ Hz}$$

Uitwerking: We weten dat de eigenfrequentie van een massa-veer-systeem gegeven wordt door $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Hier is m de massa die aan de veer hangt, en k de veerconstante. Om hiervoor een uitdrukking te vinden, gaan we als volgt tewerk:

- De massa wordt aan de veer gehangen, en de zwaartekracht trekt deze massa omlaag met een kracht $F_z = mg$. Terwijl dit gebeurt, spant de veer op, en ondervindt de massa een terugroepkracht vanwege de veer gelijk aan $F_v = k \cdot \Delta\ell$.
- Deze uitrekking gebeurt totdat de twee krachten elkaar opheffen, i.e. wanneer $k \cdot \Delta\ell = mg$. We hebben gegeven dat $\Delta\ell = 2{,}0$ cm. Of dus $=¿2 \frac{mg}{\Delta\ell}$

Bijgevolg vinden we dat $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m \cdot g}{m \cdot 2{,}0 \text{ cm}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{0{,}020 \text{ m}}} \approx 3{,}5$ Hz.

Oefening 6.7.7. Een balletje voert een horizontale harmonische trilling uit die je kan beschrijven door $x(t) = 25\text{cm} \cdot \cos(10t)$ waarin t in s wordt uitgedrukt. Op welk ogenblik is de kinetische energie voor het eerst dubbel zo groot als de potentiële energie?

CC BY-NC-SA 4.0

6.7.B Instapoefeningen

$$t = 0.096 \text{ s}$$

Uitwerking: De kinetische energie op tijdstip t wordt gegeven door $E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2(t)$, waarbij $v(t) = \left|\frac{dx(t)}{dt}\right|$. De potentiële energie op dat tijdstip wordt gegeven door $E_p(t) = \frac{1}{2}kx^2(t)$. We berekenen eerst dat

$$v(t) = |(25 \text{ cm}) \cdot \left(-10\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) \sin(10t)|$$

We willen weten wanneer $E_k(t) = 2 \cdot E_p(t)$:

$$\begin{aligned} E_k(t) &= 2 \cdot E_p(t) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2(t) &= 2\frac{1}{2}kx^2(t) \\ \Leftrightarrow v^2(t) &= 2\frac{k}{m}x^2(t)\,. \end{aligned}$$

We weten echter dat $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, en dat ω in deze oefening gelijk is aan 10 rad/s. We berekenen dus verder dat

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow v^2(t) &= 2\omega^2x^2(t) \\ \Leftrightarrow 25^2 \cdot 10^2 \cdot \sin^2(10t) &= 2 \cdot 10^2 \cdot 25^2 \cdot \cos^2(10t) \\ \Leftrightarrow \tan^2(10t) &= 2\,. \end{aligned}$$

We nemen nu de vierkantswortel van deze vergelijking, waardoor we in principe twee opties hebben: $\tan 10t = \pm\sqrt{2}$. Omdat we echter een positief tijdstip willen, zullen we de positieve wortel nodig hebben. Bijgevolg vinden we dat $t = \frac{1}{10}Bgtan(\sqrt{2})\text{ s} \approx 0.096\text{ s}$.

Oefening 6.7.8. Beschouw een harmonische trilling. Definieer Δt_1 als de tijd die nodig is om vanuit de evenwichtspositie een halve amplitude af te leggen. Definieer Δt_2 als de tijd die nodig is om vanaf een halve amplitude te bewegen tot de maximale uitwijking. Welke uitspraak is juist?

Meerkeuze:

(a) $\Delta t_1 < \Delta t_2$ ✓

(b) $\Delta t_1 = \Delta t_2$

(c) $\Delta t_1 > \Delta t_2$

(d) Er zijn te weinig gegevens over de trilling om hierover een uitspraak te doen.

Uitwerking: Beschouw de trillingsvergelijking van een harmonische trilling:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Het tijdstip waarop de trilling voor het eerst een halve amplitude heeft afgelegd is

$$\begin{aligned} \sin(\omega \cdot t) &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \omega \cdot t &= \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T}t &= \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{T}{12} \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.7.B Instapoefeningen

Het tijdstip waarop de trilling voor het eerst een volledige amplitude heeft afgelegd is

$$\sin(\omega \cdot t) = 1$$
$$\Leftrightarrow \omega \cdot t = \frac{\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} t = \frac{\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{T}{4}$$

De tijd om vanaf een halve amplitude te bewegen tot de maximale uitwijking is dus gelijk aan

$$\Delta t = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} = \frac{2T}{12}$$

Dit duurt dus dubbel zo lang als de beweging om vanuit de evenwichtspositie te bewegen tot een halve amplitude!

Oefening 6.7.9. Een massa van 0,400 kg trilt aan een verticale veer zodat de massa tot op 2 cm boven het tafelblad komt als laagste punt en tot op 18 cm boven de tafel als hoogste punt. De periode is 5,0 s. Bepaal de amplitude en de veerconstante. Bepaal ook de snelheid en de versnelling van de massa in het punt op 10 cm boven het tafelblad.

$$A = 8 \text{ cm}$$

$$k = 0.63 \text{ N/m}$$

$$v = 0.1 \text{ m/s}$$

$$a = 0 \text{ m/s}^2$$

Uitwerking: De afstand tussen het laagste en het hoogste punt is 16 cm. De amplitude is dus 8 cm of 0,08 m.

De veerconstante kunnen we bepalen via de formule voor de eigenfrequentie van een harmonische trilling $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.We vormen deze formule om naar k en vullen de gegevens in:

$$k = (2\pi f)^2 \cdot m$$
$$\Leftrightarrow k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot m$$
$$\Leftrightarrow k = \left(\frac{2\pi}{5,0\,\text{s}}\right)^2 \cdot 0,400\,\text{kg}$$
$$\Leftrightarrow k = 0,63\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Uit de trillingsvergelijking van een harmonische trilling leiden we de formule voor de snelheid en de versnelling af:

CC BY-NC-SA 4.0

6.7.B Instapoefeningen

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$
$$\Leftrightarrow v_x(t) = A\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$
$$\Leftrightarrow a_x(t) = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Op 10 cm boven de tafel bevindt de massa zich in het evenwichtspunt. We beschouwen nu een willekeurig tijdstip waarop de massa zich in het evenwichtspunt bevindt, bijvoorbeeld $t = 0$. Dan is de snelheid $v_x = A\omega$ of dus

$$v_x = 0,08\,\mathrm{m} \cdot \frac{2\pi}{5,0\,\mathrm{s}} = 0,1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

De bijhorende versnelling is dan $a_x(0) = 0$.

Oefening 6.7.10. Een massa van 2,750 kg voert een harmonische trilling uit aan een horizontale veer met veerconstante $k = 275$ N/m. In het punt op 3,0 cm van het evenwichtspunt is de snelheid van de massa $0,45$ m/s. Bepaal de amplitude van de beweging.

De amplitude is: 5.5 cm

Uitwerking: De totale energie van de trillende massa is constant en gelijk aan de som van de kinetische en de potentiële energie.

$$E_{\mathrm{tot}} = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$$

Hieruit kunnen we de amplitude A bepalen:

$$A = \sqrt{\frac{m}{k}v^2 + x^2}$$
$$\Leftrightarrow A = \sqrt{\frac{2,750\,\mathrm{kg}}{275\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} \cdot \left(0,45\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + (0,030\,\mathrm{m})^2}$$
$$\Leftrightarrow A = 0,055\,\mathrm{m}$$

De amplitude van de harmonische trilling is 5,5 cm.

6.7.C Gevorderde oefeningen

Oefening 6.7.11. Een persoon met een massa van 75,0 kg maakt een bungeesprong vanaf een hoge kraan. Nadat het laagste punt is bereikt veert de persoon in 49,0 s zeven keer op en neer. Uiteindelijk hangt de persoon stil op 30 m onder de kraan. Hoe lang is de niet-uitgerekte bungee elastiek?

De lengte van de niet-uitgerekte bungee elastiek is: 18 m

Uitwerking: De periode van de trilling die de persoon uitvoert is gelijk aan $T = \frac{49,0\,\mathrm{s}}{7} = 7,0\,\mathrm{s}$.

Nu kunnen we de veerconstante bepalen via de formule voor de eigenfrequentie van een harmonische trilling $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.We vormen deze formule om naar k en vullen de gegevens in:

$$
\begin{aligned}
& k = (2\pi f)^2 \cdot m \\
& \Leftrightarrow k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot m \\
& \Leftrightarrow k = \left(\frac{2\pi}{7,0\,\mathrm{s}}\right)^2 \cdot 0,0750\,\mathrm{kg} \\
& \Leftrightarrow k = 0,060\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

Wanneer de persoon in rust hangt is de neerwaartse zwaartekracht even groot als de opwaartse veerkracht:

$$
\begin{aligned}
& mg = k \cdot \Delta\ell \\
& \Leftrightarrow \Delta\ell = \frac{mg}{k} \\
& \Leftrightarrow \Delta\ell = \frac{0,0750\,\mathrm{kg} \cdot 9,81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}}{0,060\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} \\
& \Leftrightarrow \Delta\ell = 12\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

De lengte van de niet uitgerekte elastiek is bijgevolg $30\,\mathrm{m} - 12\,\mathrm{m} = 18\,\mathrm{m}$

CC BY-NC-SA 4.0

6.7.D Oefeningen Usolv-it

Oefening 6.7.12. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over trillingen via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

7.1 Intro golven

In vorig hoofdstuk leerde je hoe een puntmassa een harmonische trilling kan uitvoeren. In dit hoofdstuk leer je wat er gebeurt als zo'n trillende puntmassa, die deel uitmaakt van bijvoorbeeld een touw, zijn buur aanstoot zodat die ook begint te trillen, waarna die hetzelfde doet met zijn buur enzovoort . . . Steeds meer en meer puntmassa's zullen beginnen trillen, telkens met een minieme achterstand op de vorige, zodat er een golf van trillingen zal lopen door bijvoorbeeld het touw. We bestuderen vervolgens de eigenschappen van lopende golven.

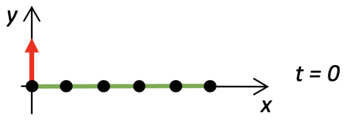
CC BY-NC-SA 4.0

7.2 Ontstaan van een golf

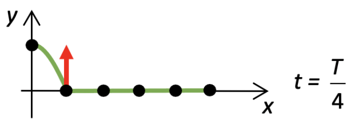
Een **golf** is een fenomeen dat ontstaat wanneer een trilling die op een bepaalde plaats opgewekt is, zich voortplant in de omgeving. Een typisch voorbeeld is geluid: een trillende snaar doet de luchtmoleculen errond trillen, die op hun beurt naburige luchtmoleculen doen trillen, die uiteindlijk je trommelvlies doen trillen, zodat je het geluid waarneemt.

Definitie 7.2.1. Een golf is de voortplanting van een trilling in de ruimte. De bron is de plaats waar de trillingen worden voortgebracht en waar de golf vertrekt.

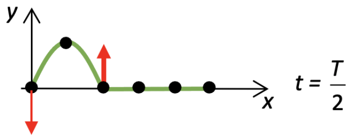
Beschouw een touw waarop je zes punten hebt aangeduid. Op een bepaald moment laat je punt 1 een trilling uitvoeren. De bron van de trilling is dus punt 1.



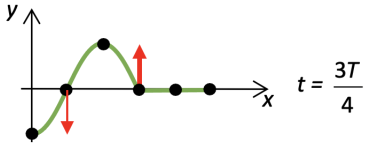
De bron (punt 1) bevindt zich in haar evenwichtspunt en beweegt naar boven.



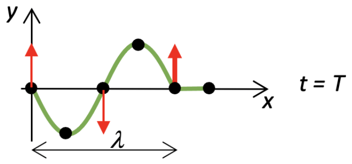
De bron bereikt haar positief maximum. Deeltjes naast de bron worden mee naar boven getrokken door cohesiekrachten. De storing heeft zich uitgebreid tot punt 2. Punt 2 begint te trillen en start naar boven.



De bron bereikt terug haar evenwichtspunt terwijl ze naar beneden beweegt. Punt 2 bereikt zijn positief maximum. Punt 3 begint te trillen en start naar boven. Dat punt trilt in tegenfase met de bron.



De bron bereikt haar negatief maximum. Punt 2 bereikt bereikt terug het evenwichtspunt. Punt 4 begint te trillen en start naar boven



De bron heeft één volledige trilling uitgevoerd. De storing heeft zich uitgebreid tot punt 5, dat vanaf nu begint te trillen. Punt 5 trilt in fase met de bron. De afstand van dat punt tot de bron definiëren we als de golflengte λ.

Als een bron een harmonische trilling uitvoert in een middenstof, zal die trilling zich uitbreiden en zal na enige tijd elk deeltje van die middenstof een harmonische trilling uitvoeren met

(a) een amplitude A die dezelfde is, als of kleiner dan, die van de bron;

(b) een frequentie f die dezelfde is als die van de bron;

(c) een beginfase φ_0 die afhangt van de afstand van dat punt tot de bron.

Enkel bij ééndimensionale, ongedempte golven is de amplitude overal dezelfde. In alle andere gevallen (meerdimensionaal en/of gedempt) zal de amplitude afnemen als je van de bron weg beweegt. De frequentie is enkel dezelfde als de middenstof homogeen is.

CC BY-NC-SA 4.0

7.3 Begrippen

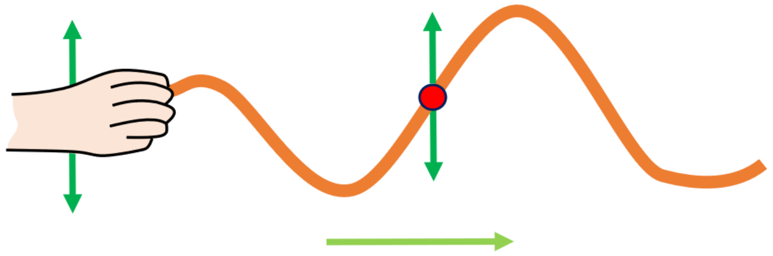
Er bestaan verschillende soorten golven. We kunnen de golven bijvoorbeeld indelen volgens de middenstof waarin ze zich voortplanten:

(a) Sommige golven hebben een middenstof nodig om zich te kunnen voortplanten. Zo'n golven noemen we **mechanische golven**. Voorbeeld: geluidsgolven planten zich voort via de lucht.

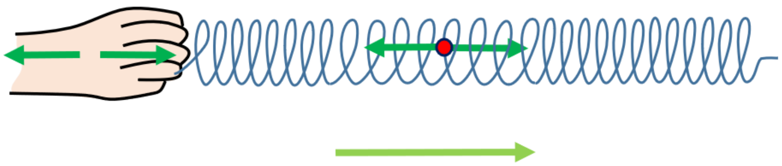
(b) **Elektromagnetische golven** (EM-golven) zoals radiogolven, lichtgolven, röntgenstralen, licht ... hebben geen middenstof nodig.

Je kan golven ook indelen volgens de trilrichting van de deeltjes:

(a) Bij een **transversale golf** staat de richting waarin de golven zich voortplanten loodrecht op de trilrichting van de deeltjes: bv. golven op een touw, golven op een wateroppervlak.



(b) Bij een **longitudinale golf** is de richting waarin de golven zich voortplanten dezelfde als de trilrichting van de deeltjes. Daardoor ontstaan verdichtingen en verdunningen in de middenstof: bv. geluidsgolven, golven in een veer.



Een derde indeling die je kan maken is volgens het aantal dimensies waarin de golf zich voortplant:

(a) **Eéndimensionale golven** zijn golven die zich uitbreiden in één enkele richting: bv. een golf op een touw, een geluidsgolf in een tunnel.

(b) **Tweedimensionale golven** zijn golven die zich uitbreiden in een vlak: bv. golven op een trommelvlies, golven op een wateroppervlak.

(c) **Driedimensionale golven** zijn golven die zich uitbreiden in de ruimte: bv. geluidsgolven in een open ruimte.

We definiëren nu een aantal begrippen, die nodig zijn om een golf te beschrijven.

CC BY-NC-SA 4.0

7.3 Begrippen

Als je een steen in stilstaand water gooit, zie je cirkels ontstaan, die groter en groter worden. Die cirkels worden gevormd door deeltjes die op hetzelfde ogenblik zijn beginnen te trillen. De lijn of het oppervlak gevormd door die deeltjes noemen we een **golffront**. Alle deeltjes van eenzelfde golffront trillen in fase met elkaar.

Er zijn oneindig veel golffronten, maar meestal tekenen we enkel de golffronten enkel voor de deeltjes die zich in een positief maximum bevinden.

Golffronten kunnen verschillende vormen hebben:

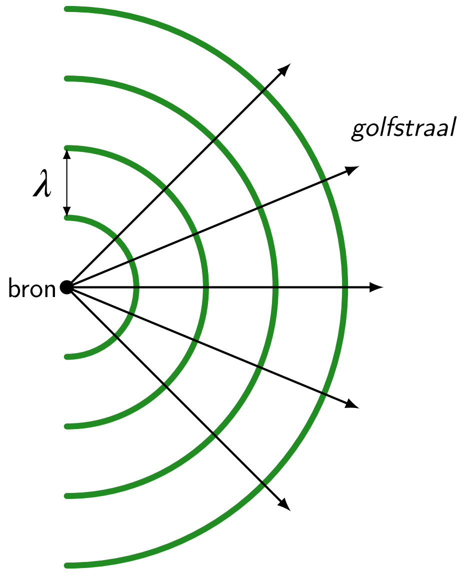
(a) lijnen of vlakken: dan spreken we van (1D) **vlakke golven**, bv. geluidsgolven in een tunnel;

(b) cirkelvormig: dat zijn (2D) **circulaire golven**, bv. golven op een wateroppervlak;

(c) bolvormig: dat zijn (3D) **sferische golven**, bv. geluidsgolven in de ruimte.

De **golfstraal** door een punt geeft de richting weer waarin het golffront van dat punt beweegt. Golfstralen staan loodrecht op de golffronten.

De **golflengte** λ is de afstand waarover de golf zich uitbreidt in een tijd T. De afstand tussen twee opeenvolgende golffronten (enkel getekend in positieve maxima) is gelijk aan de golflengte.



In een tijdsverloop gelijk aan de periode T breidt de golf zich uit over een afstand λ. Voor de snelheid waarmee dit gebeurt, geldt daarom

$$v_g = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f.$$

Deze snelheid waarmee een golf zich uitbreidt, noemen we de **voortplantingssnelheid** v_g van de golf of de **golfsnelheid**. Ze hangt af van de middenstof: bij mechanische golven is de golfsnelheid groter naarmate de cohesiekrachten tussen de deeltjes van de middenstof groter is. Bij niet-mechanische golven is dat effect, als er een middenstof is, meestal omgekeerd.

> **Voorbeeld 7.3.1.** (a) Geluid is een mechanische golf. De geluidssnelheid in lucht bedraagt 344 m/s. In water (met grotere cohesie) is dat 1500 m/s.

CC BY-NC-SA 4.0

7.3 Begrippen

(b) Licht is een niet-mechanische golf. De lichtsnelheid in lucht of vacuüm bedraagt $2,998 \cdot 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, in water is dat $2,26 \cdot 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Voorbeeld 7.3.2 (Vraagstuk)**.** Een HeNe-laser zendt rood licht uit met een golflengte van $632,8$ nm. Welke frequentie heeft dit licht?

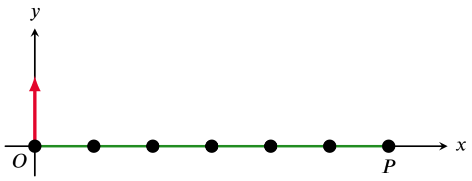
Uitwerking: De golfsnelheid van het laserlicht is natuurlijk gelijk aan de lichtsnelheid. Bijgevolg is de frequentie gelijk aan

$$f = \frac{v_g}{\lambda} = \frac{2,998 \cdot 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{632,8 \cdot 10^{-9}\mathrm{m}} = 4,738 \cdot 10^{14}\mathrm{Hz}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

7.4 De golfvergelijking(en)

De bron voert een harmonische trilling uit met amplitude A, pulsatie ω en beginfase 0. Ze verspreidt een ééndimensionale golf die ongedempt is. We leiden de **trillingsvergelijking** af voor een willekeurig punt P op een zekere afstand van de bron.



De x-coördinaat van het punt P noemen we x. Op het ogenblik $t = \frac{x}{v_g}$ komt de golf aan in het punt P.

De trillingsvergelijking van de bron wordt gegeven door $y_B(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$.

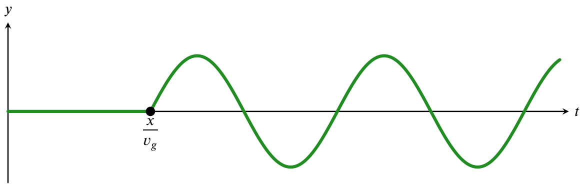
Je kan aantonen dat de trillingsvergelijking van een punt P met coördinaat x dan gegeven wordt door

$$y_P(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) \qquad (\text{met } t \geq \frac{x}{v_g} \text{ en } k = \frac{2\pi}{\lambda}).$$

Voor de trillingsvergelijking van punt P geldt dus

$$\begin{cases} y_P(t) = 0 & (\text{met } t < \frac{x}{v_g}), \\ y_P(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) & (\text{met } t \geq \frac{x}{v_g}). \end{cases} \qquad (1)$$

Dat is een samengestelde functie waarin de tijd t de variabele is en de positie x een bepaalde (vaste) waarde heeft. De $y_P(t)$-grafiek toont de uitwijking y van één punt P als functie van de tijd.



Figuur 55 – De trilling van het gekozen punt start pas als de golf is toegekomen in het punt.

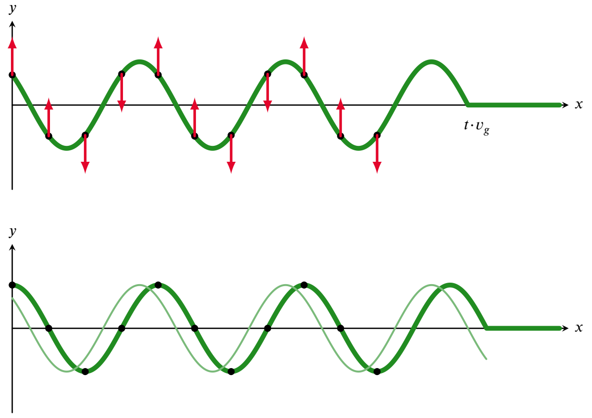
Maar je kunt in de samengestelde functie (1) ook de positie x als veranderlijke beschouwen en voor het tijdstip t een bepaalde (vaste) waarde nemen. Als je die functie omvormt, verkrijg je

$$\begin{cases} y(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) & (\text{met } x \leq t \cdot v_g), \\ y(x) = 0 & (\text{met } x > t \cdot v_g). \end{cases}$$

De onderstaande $y(x)$-grafiek toont de uitwijking y van alle punten op één bepaald tijdstip. Op de figuur eronder zie je de golf een tijdje later. Vermits de golftoppen naar rechts (= mee met de x-as) opschuiven, noemen we het een **rechtslopende golf**. Schuiven de toppen tegen de x-as op, dan spreken we van een **linkslopende golf**.

CC BY-NC-SA 4.0

7.4 De golfvergelijking(en)



Figuur 56 – (a) momentopname van de trilling van alle punten, met in enkele punten de stand van de snelheidsvector op dat tijdstip. (b) momentopname een tijdje na de momentopname in figuur (a), die ter vergelijking in dunne lijn toegevoegd is.

Zo'n grafiek kan je bekijken alsof het een foto is van de golf: je bekijkt de hele golf op één bepaald tijdstip.

Eigenschap 7.4.1. De golfvergelijking van een ééndimensionale ongedempte rechtslopende golf wordt gegeven door

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) \\ &= A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right) \\ &= A \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \end{aligned}$$

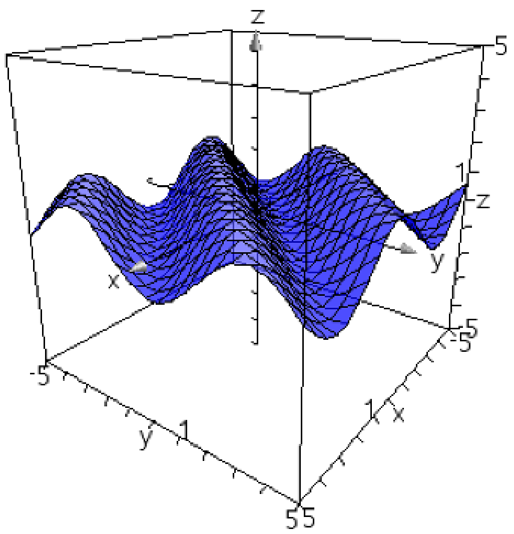
$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ is de pulsatie *van de trilling* en $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ is het golfgetal.

Voor een linkslopende golf wordt dit $y(x,t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + k \cdot x)$.

Tot slot kunnen we stellen dat de **golffunctie** een functie is met **twee onafhankelijke veranderlijken**, x en t. Vandaar dat een grafiek moeilijk te maken is en enkel via aangepaste computersoftware in 3D een mooi beeld kan geven van de functie.

CC BY-NC-SA 4.0

7.4 De golfvergelijking(en)



Figuur 57 – Computergrafiek van de golffunctie (betekenis van de assen : horizontaal x- en t-as, verticaal de uitwijking $y(x,t)$).

CC BY-NC-SA 4.0

7.5 Energie en intensiteit van een golf

Een golf is de voortplanting van een trilling in de ruimte. In het geval van sferische mechanische golven worden daarbij steeds meer deeltjes aan het trillen gebracht. Elk trillend deeltje heeft een hoeveelheid mechanische energie. Een golf transporteert dus energie door de ruimte. Een golf transporteert geen massa.

Om de trilling van een bron in stand te houden, moet voortdurend energie aan de bron geleverd worden: de bron staat immers voortdurend energie af aan de deeltjes errond. De hoeveelheid energie die de bron per seconde uitzendt is het vermogen van de bron:

$$P = \frac{E_{omgezet}}{\Delta t}$$

Deze wordt uitgedrukt in watt (W).

Voorbeeld 7.5.1.

Neem als voorbeeld een luidspreker van 26 W, die de lucht errond aan het trillen brengt.

Beschouw nu een bolvormig oppervlak rond de luidspreker op een afstand van 1 m. De oppervlakte van dit oppervlak is $A_s = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot (1,0\ \text{m})^2 = 13\ \text{m}^2$. De energie die de luidspreker uitzendt wordt verdeeld over de deeltjes op dit boloppervlak.

Verdubbel je nu de afstand tot de bron, dan wordt het boloppervlak vier keer groter: $A_s = 4\pi \cdot (2,0\ \text{m})^2 = 52\ \text{m}^2$. Ook nu wordt de energie van de bron over al deze deeltjes verdeeld, waardoor elk trillend deeltje minder energie ontvangt van de bron. Daardoor is de amplitude van de trilling van die deeltjes kleiner. Het geluid wordt minder sterk voor een waarnemer die zich verder van de bron bevindt: de intensiteit van de golf neemt af.

Definitie 7.5.1. De intensiteit I van een golf is de energie die per seconde en per m^2 doorheen een doorsnede loodrecht op de golfstralen stroomt op die plaats.

$$I = \frac{E}{\Delta t \cdot A_s} = \frac{P}{A_s}$$

I wordt uitgedrukt in $\frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

In bovenstaand voorbeeld is de intensiteit van de geluidsgolf op 1 m van de bron gelijk aan $I = \frac{26\ W}{13\ \text{m}^2} = 2,0\frac{W}{\text{m}^2}$, terwijl dit op 2 m van de bron vier keer kleiner is, $I = \frac{26\ W}{52\ \text{m}^2} = 0,5\frac{W}{\text{m}^2}$.

7.5.1 Gelduisniveau

In het geval van geluidsgolven wordt de intensiteit I van de golf meestal omgerekend naar het geluidsniveau N, dat uitgedrukt wordt in decibel (dB).

Definitie 7.5.2. Als een geluidsgolf op een bepaalde plaats een intensiteit I heeft, is het geluidsniveau N op die bepaalde plaats

$$N = 10\ \text{dB} \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

met $I_0 = 10^{-12}\frac{W}{\text{m}^2}$

Het feit dat het geluidsniveau een logaritmische functie bevat, moet een aandachtspunt zijn: indien de intensiteit op een bepaalde plaats verdubbelt, neemt het geluidsniveau slechts toe met 3 dB:

CC BY-NC-SA 4.0

$$
\begin{aligned}
N &= 10\ \mathrm{dB} \cdot \log \frac{2I}{I_0} \\
&= 10\ \mathrm{dB} \cdot \left(\log \frac{I}{I_0} + \log 2 \right) \\
&= 10\ \mathrm{dB} \cdot \log \frac{I}{I_0} + 3,0\ \mathrm{dB}
\end{aligned}
$$

Voorbeeld 7.5.2.

Koop je een stofzuiger met een geluidsniveau van 60 dB op 1 m van de stofzuiger, dan is die maar half zo luid als een stofzuiger met een geluidsniveau van 63 dB. Van zodra het geluidsniveau groter wordt dan 100 dB, kan je best gehoorbeschermers dragen.

CC BY-NC-SA 4.0

7.6 Oefeningen Golven

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

A) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

B) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

C) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

7.6.A Instapoefeningen

7.6.A Instapoefeningen

Oefening 7.6.1. Een golf met een amplitude van 4,50 cm en een frequentie van 2,00 Hz legt in 1,00 s 25,0 m af. Hoe groot is de golflengte van deze golf?

$$\lambda = 12.5 \text{ m}$$

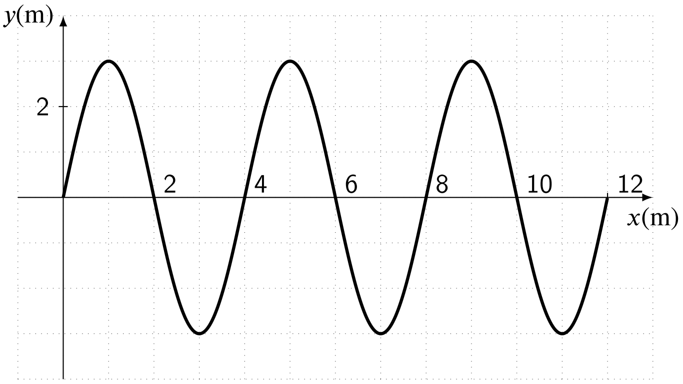
Uitwerking: De golfsnelheid wordt bepaald door $v_g = f \cdot \lambda$. Bijgevolg is

$$\lambda = \frac{v_g}{f} = \frac{25,0\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2,00 \text{ Hz}} = 12,5 \text{ m}$$

De golflengte van de golf is gelijk aan $12,5$ m.

Oefening 7.6.2. De grafiek stelt een momentopname voor van een lopende golf op tijdstip t. De golfsnelheid is 20,0 m/s. Wat is de frequentie van de bron die deze golf veroorzaakt?

$$f = 5 \text{ Hz}$$



Uitwerking: Op de grafiek lezen we de golflengte af: deze is 4 m. De golfsnelheid wordt bepaald door $v_g = f \cdot \lambda$. Bijgevolg is

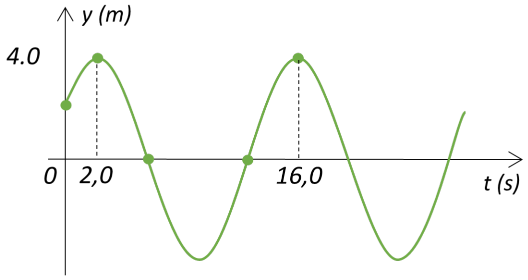
$$f = \frac{v_g}{\lambda} = \frac{20,0\frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \text{ m}} = 5 \text{ Hz}$$

De frequentie van de bron is gelijk aan 5 Hz.

Oefening 7.6.3. Onderstaande grafiek stelt de uitwijking voor van een punt op een afstand x van de bron. De tijd begon pas te lopen als de golf in het punt aankwam. De voortplantingssnelheid van de golf is $80,0$ m/s. Bepaal de golflengte van de door de bron uitgezonden golf.

CC BY-NC-SA 4.0

7.6.A Instapoefeningen



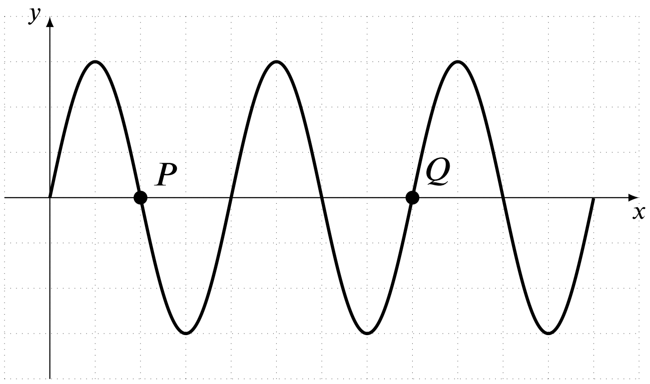
$\lambda = 1121$ m

Uitwerking: De voortplantingssnelheid is gelijk aan $v_g = \lambda \cdot f$. Uit de figuur leiden we af dat $T = 14,0$ s. Hieruit volgt dat $f = 0,0714$ Hz. Bijgevolg is $\lambda = \frac{v_g}{f} = \frac{80.0\ \frac{m}{s}}{0,0714\ \text{Hz}} = 1121$ m

CC BY-NC-SA 4.0

7.6.B Standaardoefeningen

Oefening 7.6.4. De grafiek stelt een momentopname voor van een lopende golf op tijdstip t. Hoe groot is het faseverschil tussen de punten P en Q? Druk dit uit in graden.



$$\Delta\varphi = 540\ °$$

Uitwerking: De punten P en Q zijn anderhalve golflengte van elkaar verwijderd. Punten die een golflengte van elkaar verwijderd zijn trillen in fase, hun faseverschil is gelijk aan 2π of $360°$. Bijgevolg is het faseverschil tussen P en Q gelijk aan $1{,}5 \cdot 360° = 540°$.

Oefening 7.6.5. De vergelijking van een rechtslopende golf wordt gegeven door:

$$y(x,t) = 5\ sin(2\pi(2t - \frac{x}{3}))$$

Wat is de frequentie van de bron die de golf uitzendt? Wat is de golflengte?

$$f = 2\ \text{Hz}$$

$$\lambda = 3\ \text{m}$$

Uitwerking: Het algemeen voorschrift van een rechtslopende golf is gegeven door

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) \\ &= A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right) \\ &= A \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \end{aligned}$$

Hierin is $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$ de pulsatie van de trilling en $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ is het golfgetal. Hieruit volgt dat de frequentie gelijk is aan 2 Hz en de golflengte gelijk is aan 3 m.

Oefening 7.6.6. Welke uitspraak is juist?

Meerkeuze:

CC BY-NC-SA 4.0

7.6.B Standaardoefeningen

(a) Bij een lopende golf wordt massa getransporteerd in de voortplantingsrichting.

(b) Als de frequentie van de trillende bron toeneemt, neemt ook de golflengte toe.

(c) Mechanische golven planten zich sneller voort in vaste stoffen dan in vloeistoffen. ✓

(d) Bij een golf die zich met cirkelvormige golffronten over een wateroppervlak voortplant, is de afname van de amplitude in punten verder van de bron uitsluitend te wijten aan energieverlies door bijvoorbeeld wrijving.

Uitwerking: Bij mechanische golven neemt de snelheid van de golf toe als de dichtheid van de middenstof toeneemt. Bij vaste stoffen is de dichtheid groter dan bij vloeistoffen, zodat ook de golfsnelheid groter is in een vaste stof.

Oefening 7.6.7. De vergelijking van een rechtslopende golf wordt gegeven door:

$$y(x,t) = 15\ sin(2\pi(\frac{t}{0,30} - \frac{x}{1,5}))$$

Hoe lang duurt het vooraleer deze golf 40 m heeft afgelegd?

$$t = 8\ \text{s}$$

Uitwerking: Het algemeen voorschrift van een rechtslopende golf is gegeven door

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) \\ &= A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right) \\ &= A \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \end{aligned}$$

Hierin is $\omega = \frac{2\pi}{T}$ de pulsatie van de trilling en $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ is het golfgetal. Hieruit volgt dat de periode gelijk is aan 0,30 s en de golflengte gelijk is aan 1,5 m. De golfsnelheid wordt bepaald door

$$v_g = f \cdot \lambda = \frac{\lambda}{T} = \frac{1,5\ \text{m}}{0,30\ \text{s}} = 5,0\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

De golf legt dus 5 m af per seconde, zodat het 8 s duurt om 40 m af te leggen.

Oefening 7.6.8. In de buurt van de luchthaven meet men bij het opstijgen van een passagiersvliegtuig op 300 m afstand een geluidsniveau van 88,0 dB. Bereken de intensiteit van de geluidsgolf op die plaats.

$$I = 6.3\ 10^{-4}\frac{W}{\text{m}^2}$$

Uitwerking: Uit de definitie van geluidsniveau $N = 10\ \text{dB} \cdot \log\frac{I}{I_0}$ leiden we een uitdrukking af voor de

CC BY-NC-SA 4.0

7.6.B Standaardoefeningen

intentsiteit I:

$$88\text{ dB} = 10\text{ dB} \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

$$8,8 = \log \frac{I}{I_0}$$

$$10^{8,8} = \frac{I}{I_0}$$

$$I = 10^{8,8} \cdot I_0$$

$$I = 10^{8,8} \cdot 10^{-12} \frac{W}{\text{m}^2}$$

$$I = 10^{-3,2} \frac{W}{\text{m}^2}$$

$$I = 6,3 \cdot 10^{-4} \frac{W}{\text{m}^2}$$

CC BY-NC-SA 4.0

7.6.C Oefeningen Usolv-it

Oefening 7.6.9. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over golven via het Usolv-it oefenplatform.

Oefening 7.6.10. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over geluid via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

8.1 Intro hydrostatica

In dit hoofdstuk beschouwen we een fluïdum in rust. We onderzoeken de druk op een bepaalde plaats in het fluïdum en gaan na waar deze druk van afhangt. Met een fluïdum bedoelen we een vloeistof of een gas.

We bespreken ook de Archimedeskracht die inwerkt op een ondergedompeld voorwerp.

CC BY-NC-SA 4.0

8.2 Hydrostatische druk

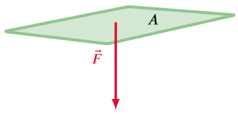
De dichtheid van een materiaal is gedefinieerd als de hoeveelheid massa, M, per eenheid volume V:

$$\rho = \frac{M}{V}.$$

De SI-eenheid van dichtheid is: kg/m^3.

De druk op een oppervlak wordt gedefinieerd als de grootte van de normaalkracht (de kracht loodrecht op het oppervlak) per eenheid van oppervlakte:

$$p = \frac{F}{A}.$$



De SI-eenheid van druk is Pascal (1 Pa = 1 N/m^2).

De atmosferische druk $p_0 = 1.01 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 101\mathrm{kPa}$.

8.2.1 Hoogte-afhankelijkheid van de druk

We beschouwen vloeistoffen die weinig samendrukbaar zijn. Daarom mogen we aannemen dat de massadichtheid in de volledige vloeistof even groot is.

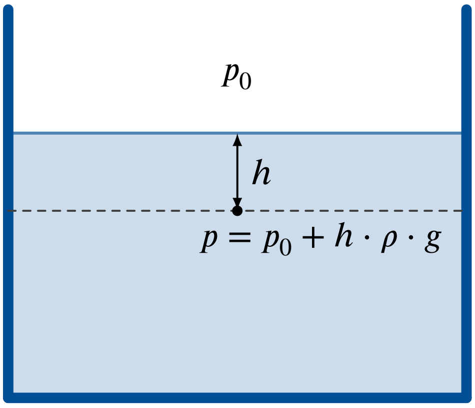
Als p_0 de atmosferische druk is net boven het vloeistofoppervlak (zie figuur 58), dan is op een diepte h in die vloeistof de druk gelijk aan

$$p = p_0 + h \cdot \rho \cdot g$$

De druk neemt dus lineair toe met de diepte. Merk op dat we hier veronderstellen dat de enige kracht die op de vloeistof werkt, de zwaartekracht is. De tweede term in de formule noemen we de hydrostatische druk, dit is de druk die door de vloeistof alleen wordt uitgeoefend:

$$p_H = h \cdot \rho \cdot g$$

In eenzelfde vloeistof in rust is de druk in een horizontaal vlak overal dezelfde.



Figuur 58 – De druk in een fluïdum neemt toe met de diepte.

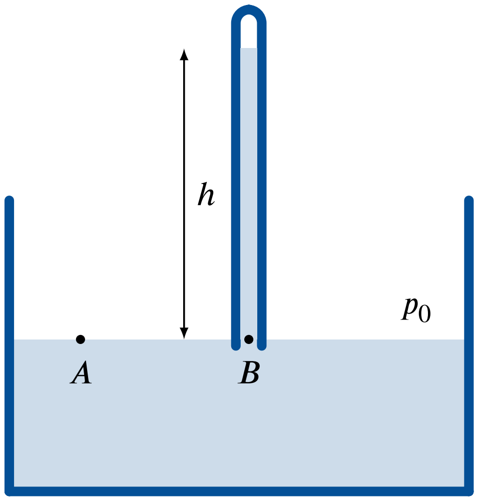
CC BY-NC-SA 4.0

8.2.2 Drukmeting met de buis van Torricelli

Uit vergelijking (**??**) volgt dat we een drukverschil kunnen uitdrukken als een hoogteverschil. Dit laat toe om drukmetingen te herleiden tot lengtemetingen. Een fundamentele opstelling om de luchtdruk te meten, is de buis van Torricelli (zie figuur 59). Een lange verticale buis wordt gevuld met kwik (Hg) en omgekeerd verticaal in een kwikbad gezet. Zo ontstaat vacuüm boven het kwikoppervlak in de buis. De druk in A is gelijk aan de druk in B (in eenzelfde vloeistof is de druk op een horizontaal vlak overal gelijk).

$$p_0 = p_A = p_B = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h$$

Vermits p_A gelijk is aan de druk door de lucht op het kwikoppervlak buiten de buis, kunnen we dus de luchtdruk bepalen door de hoogte h te meten.



Figuur 59 – Drukmeting met de buis van Torricelli.

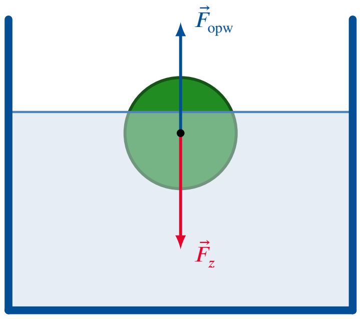
CC BY-NC-SA 4.0

8.3 Wet van Archimedes

Als een deel V_0 van een voorwerp met volume V ondergedompeld is in een fluïdum, dan ondervindt dit voorwerp een opwaartse stuwkracht waarvan de grootte gelijk is aan de zwaartekracht die op een volume V_0 van het fluïdum inwerkt (= gewicht van de verplaatste vloeistof in rust).

$$F_{\text{opw}} = \rho_{\text{vl}} \cdot V_0 \cdot g$$

met ρ_{vl} de dichtheid van de vloeistof en V_0 het ondergedompelde volume van het voorwerp.



Een voorwerp drijft als de zwaartekracht op het voorwerp gelijk is aan de opwaartse stuwkracht, m.a.w. als het een hoeveelheid fluïdum verplaatst dat een gewicht heeft gelijk aan het gewicht van het voorwerp (geheel of gedeeltelijk ondergedompeld).

Voorbeeld 8.3.1. Een drijvend ijsblokje met volume V drijft in een glas water. Welke fractie van het ijsblokje bevindt zich boven het waterniveau ($\rho_{\text{ijs}} = 917 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\rho_{\text{water}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)?

Uitwerking: Het ijsblokje drijft, dit wil zeggen dat de opwaartse Archimedeskracht gelijk is aan de neerwaartse zwaartekracht op het ijsblokje (evenwicht).

$$\begin{aligned} F_z &= F_A \\ m_{ijs} \cdot g &= \rho_{water} \cdot V_0 \cdot g \\ \rho_{ijs} \cdot V \cdot g &= \rho_{water} \cdot V_0 \cdot g \\ \frac{\rho_{ijs}}{\rho_{water}} &= \frac{V_0}{V} \\ \frac{V_0}{V} &= 0,917 \end{aligned}$$

$91,7$ % van het ijsblokje bevindt zich onder het waterniveau en dus $8,3$ % boven het waterniveau.

CC BY-NC-SA 4.0

8.4 Oefeningen Hydrostatica

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

A) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

B) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

C) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

8.4.A Instapoefeningen

Oefening 8.4.1. Het diepste punt in de oceaan is gelegen in de Marianentrog in de Stille Oceaan op ongeveer 11,034 km diepte. Dit punt, ten oosten van de Filipijnen, is onderdeel van een diepe kloof die bekend staat als het diepste punt van de aardkorst, waar de druk meer dan 1000 keer hoger is dan aan de oppervlakte. Hoe groot is de druk daar precies? Er is nog gegeven dat de dichtheid van zeewater $1030 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ bedraagt.

$$p = 1116 \cdot 10^5 \text{Pa}$$

Uitwerking: De totale druk in het water in de oceaan kan bepaald worden met de formule

$$p = p_0 + h \cdot \rho \cdot g$$

We vullen de gegevens in en bekomen dat

$$p = 1013 \cdot 10^2 \text{ Pa} + 11034 \text{ m} \cdot 1030 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1116 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

De druk in het diepst bekende punt van de oceaan is $1116 \cdot 10^5$ Pa.

Oefening 8.4.2. Tussen het waterpeil in een watertoren en het water in jouw kraan bestaat een hoogteverschil van 55,0 m. Hoe groot is de hydrostatische druk in jouw kraan?

$$p = 5.40 \cdot 10^5 \text{Pa}$$

Uitwerking: De hydrostatische druk in het water in de kraan kan bepaald worden met de formule

$$p = h \cdot \rho \cdot g$$

We vullen de gegevens in en bekomen dat

$$p = 55,0 \text{ m} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 5,40 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

De hydrostatische druk in het water van de kraan is $5,40 \cdot 10^5$ Pa.

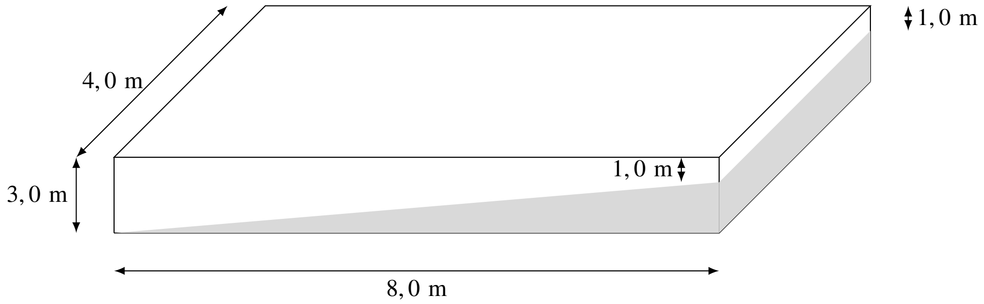
Oefening 8.4.3. Een zwembad van 4 m bij 8 m en een diepte die lineair toeneemt van 1 m tot 3 m, is tot de rand gevuld met zeewater. Hoe groot is de massa van het water in dit zwembad?

De dichtheid van zeewater bedraagt $1030 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

$$m = 6.6 \cdot 10^4 \text{kg}$$

CC BY-NC-SA 4.0

8.4.A Instapoefeningen



Uitwerking:

Het volume van het water in het zwembad bedraagt

$$V = 4\ \text{m} \cdot 8\ \text{m} \cdot 3\ \text{m} - \frac{1}{2}(4\ \text{m} \cdot 8\ \text{m} \cdot 2\ \text{m}) = 64\ \text{m}^3$$

De massa van het water in het zwembad is dan

$$m = \rho \cdot V = (1030\ \text{kg/m}^3)(64\ \text{m}^3) = 6,6 \cdot 10^4\ \text{kg}$$

Oefening 8.4.4. Je speelt in een zwembad met je vrienden met een opgeblazen strandbal met diameter 60 cm. Hoe groot moet de kracht op de bal zijn als je de bal volledig wilt onderdompelen?

$$F = 1.1\ \text{kN}$$

Uitwerking: De opwaartse stuwkracht wordt bepaald door de wet van Archimedes. Negeer enige samendrukking van de lucht in de bal ten gevolge van het onderdompelen. De massa van de bal mag als verwaarloosbaar beschouwd worden, zodat de kracht die nodig is om de bal onder te dompelen gelijk is aan de opwaartse stuwkracht F_{opw}.

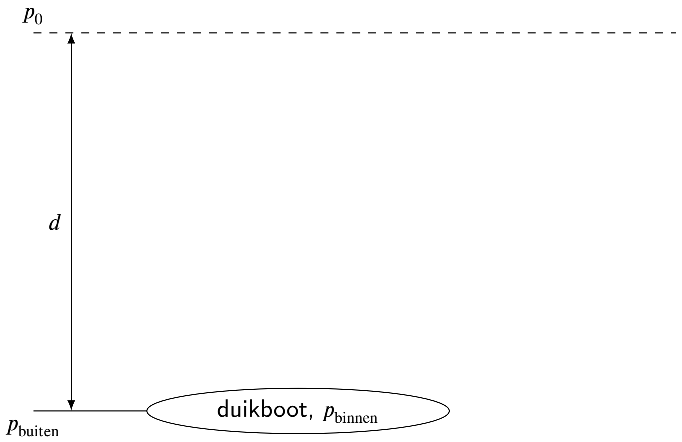
$$F_{\text{opw}} = \rho_w V_{\text{bal}} g = \rho_w \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) g = (1000\ \text{kg/m}^3)\left[\frac{4}{3}\pi(0,30\ \text{m})^3\right](9,81\ \text{m/s}^2) = 1,1\ \text{kN}$$

CC BY-NC-SA 4.0

8.4.B Standaardoefeningen

Oefening 8.4.5. Een duikboot heeft een raam met diameter 20 cm. Het glas is 8,0 cm dik. De fabrikant van de duikboot zegt dat het raam een kracht van maximaal $2 \cdot 10^6$ N kan verdragen. Wat is het diepste punt waarbij de boot nog veilig onder water kan blijven? De druk in de duikboot is gelijk aan de atmosferische druk.

$$d = 6.3 \text{ km}$$



Uitwerking:

De druk op de buitenkant van het raam is $p_{\text{buiten}} = p_0 + \rho_{\text{zeewater}} g d$, waarbij d het diepste punt is waarbij het raam de druk nog aankan. Die druk wordt gegeven door $F/A = p_{\text{buiten}} - p_{\text{binnen}}$, met F de resulterende kracht op het raam en A het oppervlak van het raam. Gebruikmakend van het gegeven dat $p_{\text{binnen}} = p_0$, kan bekomen worden dat

$$p_{\text{buiten}} - p_0 = \frac{F}{A} = \rho_{\text{zeewater}} g d \Rightarrow d = \frac{F}{A \rho_{\text{zeewater}} g}$$

$$d = \frac{2,0 \cdot 10^6 \text{ N}}{\pi (0,10 \text{ m})^2 (1030 \text{ kg/m}^2)(9,8 \text{ m/s}^2)} = 6,3 \text{ km}$$

Oefening 8.4.6. Hoe hoog moet een gesloten buis gevuld met water zijn opdat de druk onderaan gelijk zou zijn aan de atmosferische druk?

$$h = 10.3 \text{ m}$$

Uitwerking: De vergelijking voor hydrostatische druk kan gebruikt worden om het volgende te bekomen:

$$p_H = \rho g h = p_0$$

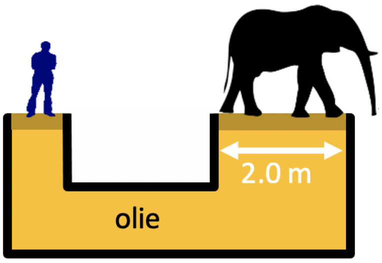
Dit kan omgevormd worden naar h en $p_0 = 1.013 \cdot 10^5$ Pa kan ingevuld worden om de volgende uitdrukking te bekomen:

$$(1000 \text{ kg/m}^3)(9,81 \text{ m/s}^2) h = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \Rightarrow h = 10,3 \text{ m}$$

Oefening 8.4.7. Een student van 70 kg houdt een olifant van 5000 kg in evenwicht op een hydraulische pers. Als de olifant op een rond platform staat met diameter 2,0 m, wat is dan de diameter van het platform waarop de student staat?

CC BY-NC-SA 4.0

8.4.B Standaardoefeningen



$$d = 0.24 \text{ m}$$

Uitwerking: Er kan aangenomen worden dat de olie niet samengedrukt wordt. De pers is in evenwicht en de student en de olifant bevinden zich op dezelfde hoogte. Hierdoor kan de volgende vergelijking opgesteld worden:

$$p_{\text{links}} = p_{\text{rechts}} \Leftrightarrow \frac{F_{\text{links}}}{A_{\text{links}}} = \frac{F_{\text{rechts}}}{A_{\text{rechts}}} \Leftrightarrow \frac{(F_z)_{\text{student}}}{\pi\left(r_{\text{student}}\right)^2} = \frac{(F_z)_{\text{olifant}}}{\pi\left(r_{\text{olifant}}\right)^2}$$

Dit kan omgevormd worden tot een uitdrukking voor r_{student}:

$$r_{\text{student}} = \sqrt{\frac{(F_z)_{\text{student}}}{(F_z)_{\text{olifant}}}}\left(r_{\text{olifant}}\right) = \sqrt{\frac{(70 \text{ kg})g}{(5000 \text{ kg})g}}(1,0 \text{ m}) = 0,12 \text{ m}$$

De diameter van het platform waar de student op staat bedraagt dus $2 \cdot r_{\text{student}} = 0,24$ m.

Oefening 8.4.8. Verklaar hoe een boot kan drijven wetende dat metaal (bv. roestvrij staal) een hogere dichtheid heeft dan water.

Uitwerking: Een metalen boot kan drijven als hij een volume water verplaatst met een gewicht gelijk aan zijn eigen gewicht. Dit kan verwezenlijkt worden door de metalen boot te construeren in de vorm van een kom die hol is binnenin. Op die manier kan er een voldoende hoeveelheid water verplaatst worden waarvan het gewicht gelijk is aan het gewicht van de boot. Zo kan deze blijven drijven.

Oefening 8.4.9. Een persoon zit in een bootje en drijft hiermee in een zwembad. In de boot liggen verschillende bakstenen. De persoon gooit de bakstenen overboord. Ze zinken naar de bodem. (a) Zal het waterniveau in het zwembad afnemen✓ (b)Welke van onderstaande uitdrukkingen is geldig?

i✓

i. Wanneer de bakstenen zinken naar de bodem verplaatsen ze minder water dan wanneer ze drijven in de boot, dus zal het waterniveau afnemen.

ii. In beide gevallen is eenzelfde massa (boot + persoon + bakstenen) in het zwembad dus zal het waterniveau hetzelfde blijven.

iii. De bakstenen verplaatsen meer water als ze zinken naar de bodem van het zwembad dan wanneer ze in de boot drijven, daardoor zal het waterniveau stijgen.

CC BY-NC-SA 4.0

8.4.B Standaardoefeningen

Uitwerking: Gebruik het principe van Archimedes. Wanneer een baksteen in de boot ligt, verplaatst die een volume water met een gewicht gelijk aan zijn eigen gewicht (want baksteen drijft in de boot). Wanneer de baksteen op de bodem van het zwembad ligt, verplaatst hij een volume water gelijk aan zijn eigen volume. De baksteen zal dus meer water verplaatsen als hij in de boot ligt. Het waterniveau zal dus dalen wanneer de bakstenen uit de boot worden gegooid. Uitdrukking i. is geldig

CC BY-NC-SA 4.0

8.4.C Gevorderde oefeningen

Oefening 8.4.10. Een sluis in een kanaal met lengte 50,0 m, breedte 40,0 m en diepte 2,50 m wordt afgesloten met een grote, zware deur. Hoe groot is de kracht die het water in de sluis op de deur uitoefent?

$$F = 114 \cdot 10^5 \text{N}$$

Uitwerking: De hydrostatische druk op de bodem van de sluis is gelijk aan $p = h \cdot \rho \cdot g$.

De hydrostatische druk in het water van de sluis neemt lineair toe van 0 Pa tot p, zodat de gemiddelde hydrostatische druk op de sluisdeur gelijk is aan $\langle p \rangle = \frac{0+p}{2} = \frac{1}{2} h \cdot \rho \cdot g$.

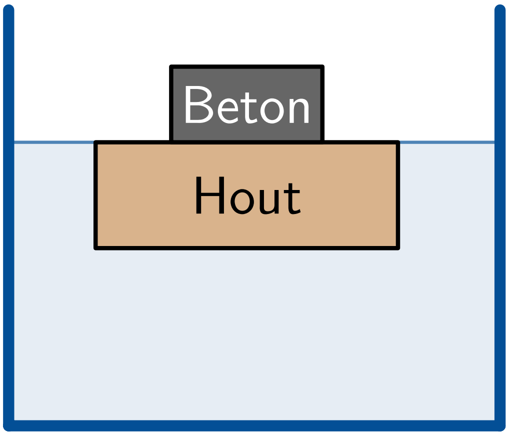
Volgens het beginsel van Pascal heeft de luchtdruk p_0 op het water op elke diepte invloed op de totale druk van het water. Bijgevolg is de kracht van het water in de sluis op de deur gelijk aan $F = \left(p_0 + \langle p \rangle\right) \cdot A$, met A de oppervlakte van de sluisdeur.

We vullen nu de gegevens in en bekomen dat:

$$F = \left(1013 \cdot 10^2 \text{ Pa} + \frac{1}{2} \cdot 2,50 \text{ m} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}\right) \cdot (2,50 \text{ m} \cdot 40,0 \text{ m}) = 114 \cdot 10^5 \text{ N}$$

Het water in de sluis oefent dus een kracht uit van $114 \cdot 10^5$ N op de deur.

Oefening 8.4.11. Een eikenhouten blok met een massa van 330 g drijft op water. Op dit blokje ligt een stuk beton, zodat de bovenkant van het hout gelijk komt met het wateroppervlak. Hoe groot is de massa van het stuk beton? Er is nog gegeven dat de dichtheid van het eikenhout gelijk is aan $\rho = 660 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.



$$m = 170 \text{ g}$$

Uitwerking: Op het eikenhouten blokje werken drie krachten: de zwaartekracht, de archimedeskracht en het gewicht van het betonnen blokje. Omdat het houten blokje blijft drijven is de som van deze krachten gelijk aan nul. De opwaartse stuwkracht van het water is dus in grootte gelijk aan de som van de neerwaartse krachten op het blokje:

$$\rho_{water} \cdot V_0 \cdot g = m_{hout} \cdot g + m_{beton} \cdot g$$

CC BY-NC-SA 4.0

8.4.C Gevorderde oefeningen

Hieruit volgt dat $\rho_{water} \cdot V_0 = m_{hout} + m_{beton}$. Bijgevolg is de massa van het betonnen blok gelijk aan

$$m_{beton} = \rho_{water} \cdot V_0 - m_{hout}$$

en dus is

$$m_{beton} = \rho_{water} \cdot \frac{m_{hout}}{\rho_{hout}} - m_{hout} = 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{0,330\ \text{kg}}{660\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} - 0,330\ \text{kg} = 0,170\ \text{kg}$$

De massa van het betonnen blokje is dus 170 g.

9.1 Intro elektrostatica

In ons dagelijks leven is elektriciteit overal aanwezig. De oorsprong van alle elektrische verschijnselen ligt in de materie zelf. Deze is nl. microscopisch opgebouwd uit positief geladen protonen, negatief geladen elektronen en neutronen. Deze laatste zijn elektrisch neutraal. In dit hoofdstuk bespreken we de basiseigenschappen van elektrische ladingen en hun onderlinge interacties. De grootte van de elektrische krachten tussen puntladingen wordt beschreven door de wet van Coulomb. In de omgeving van een lading of ladingsverdeling heerst een krachtveld, met name een elektrisch veld. Ten slotte bekijken we de potentiële energie van een puntlading in een homogeen elektrisch veld en definiëren het begrip potentiaal.

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Elektrische krachtwerking

9.2.1 Elektrische lading

In dit deel bekijken we de eigenschappen van statische elektrische ladingen. Men maakt een onderscheid tussen positieve en negatieve ladingen.

(a) Een elektron is de kleinste negatieve lading en heeft een elementaire lading van $-e = -1.60 \cdot 10^{-19}$C.

(b) Een proton is de kleinste positieve lading en heeft een elementaire lading van $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$C.

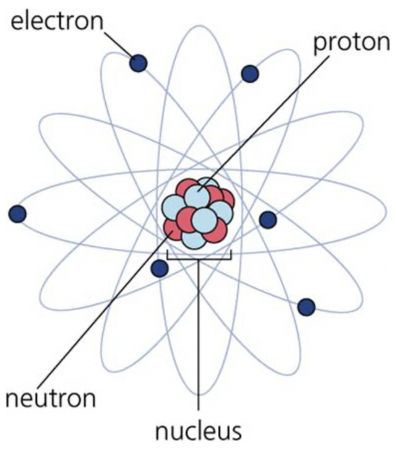
Hierin staat C voor Coulomb, de SI-eenheid van lading (1 Coulomb $= 1$ Ampère per seconde).

De elektrische lading Q is gekwantiseerd of komt enkel voor in discrete veelvouden van de elementaire lading.

$$Q = n \cdot e \qquad \text{met } n = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$$

Wanneer in een voorwerp het aantal positieve ladingen gelijk is aan het aantal negatieve ladingen, noemt men het voorwerp elektrisch neutraal. Een voorbeeld van een elektrisch neutraal object is een atoom. Dit bestaat uit een positieve kern omringd door een negatieve elektronenwolk (zie figuur 60). Omdat het aantal protonen in de kern gelijk is aan het aantal elektronen in de elektronenwolk, is een atoom elektrisch neutraal.

In de atoomkern zitten naast protonen ook neutronen, maar deze zijn elektrisch neutraal met lading nul.



Figuur 60 – De structuur van een atoom bestaande uit een positieve kern (nucleus) en een negatieve elektronenwolk waarin elektronen op cirkelvormige banen rond de kern bewegen.

Om een macroscopisch object elektrisch op te laden worden elektronen toegevoegd of weggenomen. Zo ontstaat er een netto- of excess-lading:

(a) Voeg je elektronen toe, dan wordt het een negatief geladen voorwerp: het aantal elektronen in het voorwerp is dan groter dan het aantal protonen in het voorwerp.

(b) Neem je elektronen weg, dan wordt het een positief geladen voorwerp: het aantal elektronen in het voorwerp is dan kleiner dan het aantal protonen in het voorwerp.

In een geïsoleerd systeem blijft de elektrische lading altijd behouden.

Sommige voorwerpen worden elektrisch geladen als je ze tegen elkaar wrijft. We wrijven een rubberen staaf met een wollen doekje, wordt de staaf negatief geladen: door het contact tussen het doekje en de staaf zijn

CC BY-NC-SA 4.0

er elektronen van het doekje naar de staaf gegaan. Het doekje is daardoor positief geladen. Wanneer we een tweede rubberen staaf wrijven en in de buurt brengen van de eerste, stellen we vast dat beide staven elkaar afstoten. Wrijven we nu een glazen staaf met een zijden doek en brengen we deze in de buurt van de rubberen staaf, dan trekken de glazen en rubberen staaf elkaar aan.

Tegengestelde ladingen trekken elkaar aan. Ladingen met hetzelfde teken stoten elkaar af.

9.2.2 Elektrische geleiders en isolatoren

Elektronen kunnen bewegen in materialen. Afhankelijk van het materiaal gebeurt deze verplaatsing makkelijker. **Geleiders** zijn stoffen waarin een groot deel van de elektronen (vrije elektronen) niet gebonden zijn aan de atomen en vrij kunnen bewegen. Hierdoor verplaatsen elektronen in geleiders zich gemakkelijk. Alle metalen (zilver, koper, goud, aluminium, ijzer, nikkel, enz.) zijn geleiders. Zilver is de beste geleider maar men gebruikt in elektrische toestellen echter vooral koper omdat het goedkoper is.

Isolatoren of niet-geleiders (glas, rubber, hout,...) zijn stoffen waarbij alle elektronen gebonden zijn aan de atomen en niet vrij door het materiaal kunnen bewegen.

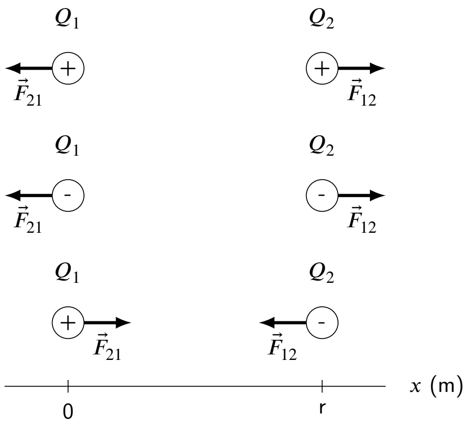
Bij **halfgeleiders** zijn elektronen minder sterk gebonden aan de atomen en kunnen vrij bewegen als ze extra energie krijgen (door bv. temperatuur, licht, ...). De geleiding is ook controleerbaar via dopering met andere atomen. Silicium en germanium zijn twee gekende voorbeelden van halfgeleiders die veelvuldig gebruikt worden in de fabricage van elektronische chips voor computers, mobiele telefoons,... .

9.2.3 Elektrische krachtwerking - wet van Coulomb

Een van de fundamentele vergelijkingen in de elektrostatica is de wet van Coulomb. Deze beschrijft de grootte van de kracht tussen twee puntladingen Q_1 en Q_2 op een afstand r van elkaar:

$$F = k \cdot \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{r^2}$$

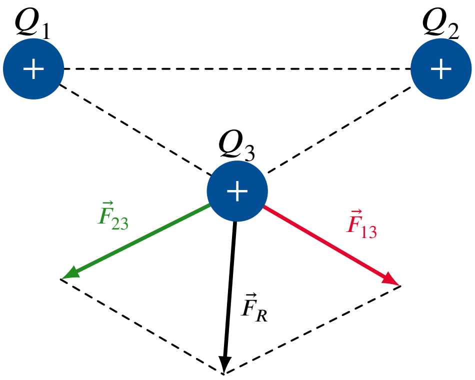
met evenredigheidsconstante de constante van Coulomb $k = 8,99 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$ voor vacuüm. De richting van deze kracht is volgens de rechte die de twee ladingen verbindt. Gelijke ladingen stoten elkaar af en tegengestelde ladingen trekken elkaar aan. Hieruit kan de zin van de Coulombkracht bepaald worden (zie figuur 61).



Figuur 61 – Krachtwerking tussen twee puntladingen.

Wanneer een lading Q_3 krachten ondervindt van twee (of meerdere) andere ladingen Q_1 en Q_2, is de resulterende kracht op deze lading de vectorsom van de individuele krachten (zie figuur 62): $\vec{F}_R = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$. Hierin is $\vec{F}_{13}$ de kracht die lading Q_1 op lading Q_3 uitoefent en $\vec{F}_{23}$ de kracht die lading Q_2 op lading Q_3 uitoefent.

CC BY-NC-SA 4.0



Figuur 62 – Resultante van Coulombkrachten van meerdere puntladingen.

9.3 Elektrische velden

9.3.1 Definitie

Net zoals de gravitatiekracht is de elektrische kracht een veldkracht die door de ruimte werkzaam is zonder contact tussen de interagerende objecten (ladingen). Elektrische ladingen trekken mekaar aan of stoten elkaar af. In de omgeving van een bronlading of een ladingsverdeling heerst bijgevolg een elektrisch krachtveld. Dit veld noemt men het elektrisch veld.

Als een positieve testlading Q_0 dit elektrisch veld binnentreedt op een bepaalde plaats in de ruimte, zal er een elektrische kracht $\vec{F}$ op werken. We definiëren dan de elektrische veldvector $\vec{E}$ op een plaats in de ruimte als de elektrische kracht $\vec{F}$ die inwerkt op de positieve testlading Q_0 die op dat punt geplaatst wordt, gedeeld door de testlading:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0}.$$

De elektrische veldsterkte is dan gelijk aan $E = \dfrac{F}{|Q_0|}$. De SI-eenheid van elektrisch veldsterkte is 1 Newton per Coulomb (1 N/C).

Het elektrisch veld is dus de kracht per eenheid lading op een bepaalde plaats. Als we omgekeerd het elektrisch veld op een bepaalde plaats kennen, dan is de kracht die een lading Q op die plaats ondervindt

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}.$$

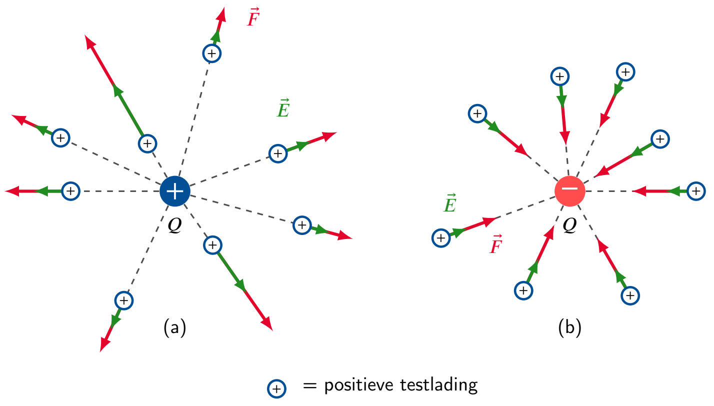
Merk op dat de zin van de kracht afhangt van het teken van de lading Q. Een positieve lading Q ondervindt een kracht met dezelfde richting en zin als het elektrisch veld. Een negatieve lading Q ondervindt een kracht met dezelfde richting, maar tegengestelde zin aan $\vec{E}$.

9.3.2 Soorten elektrische velden

Indien er slechts één bronlading verantwoordelijk is voor het veld, noemen we het veld een **radiaal veld**. Voor de grootte van het veld van één bronlading Q geldt:

$$E = \frac{F}{|Q_0|} = k \cdot \frac{|Q_0| \cdot |Q|}{r^2 \cdot |Q_0|} = k \cdot \frac{|Q|}{r^2}.$$

Hoe dichter bij de bronlading, hoe sterker het veld. In een radiaal elektrisch veld is het veld dus niet overal even sterk. Op een figuur worden de veldvectoren dus niet allemaal even lang getekend.



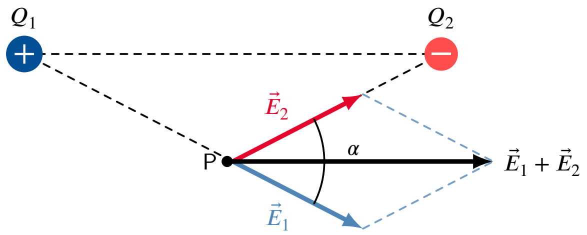
Figuur 63 – Radiaal elektrisch veld van (a) een positieve bronlading en (b) een negatieve bronlading.

Als het veld wel overal even sterk is, spreekt men van een **homogeen elektrisch veld**.

CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Elektrische velden

Indien je twee even sterke bronladingen neemt, een positieve en een negatieve, spreekt men van een **dipoolveld**. Het elektrisch veld in een punt van de omgeving is dan een som van twee elektrische velden.

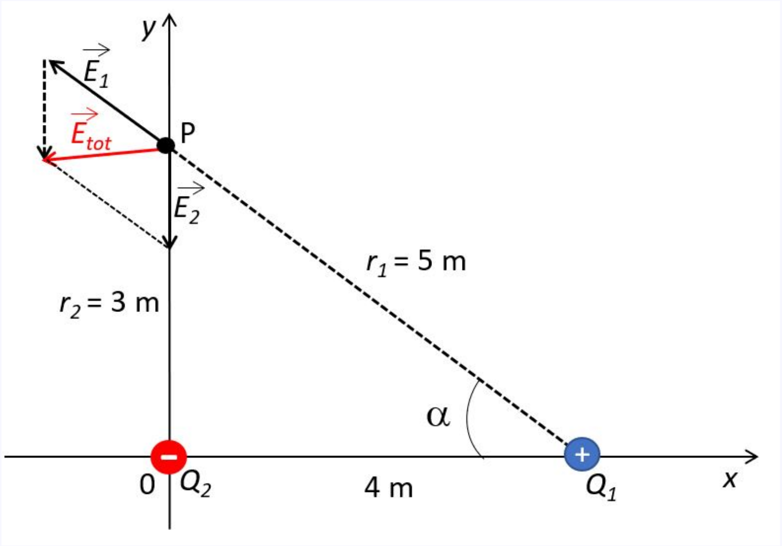


Figuur 64 – De som van twee veldvectoren in een punt P.

De formule voor de som van die twee vectoren is gegeven door

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot \cos\alpha}.$$

Voorbeeld 9.3.1 (elektrisch veld). Een lading Q_1 wordt op positie $x = 4,0$ m op de x-as geplaatst. Een tweede lading Q_2 wordt in de oorsprong geplaatst. Als $Q_1 = 75$ nC en $Q_2 = -8$ nC, wat is dan de grootte van het elektrisch veld op de y-as op $y = 3,0$ m?



Figuur 65 – voorbeeld: De som van twee veldvectoren op een bepaalde plaats.

Zoals weergegeven in de figuur zal de totale veldsterkte in het punt P gelijk zijn aan de vectoriële som $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ waarbij $\vec{E}_1$ het veld is veroorzaakt door de positieve lading Q_1 en $\vec{E}_2$ het veld veroorzaakt door de negatieve lading Q_2. De grootte van $\vec{E}_1$ en $\vec{E}_2$:

$$E_1 = \frac{k \cdot |Q_1|}{r_1^2} = \frac{8,99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \cdot 75 \cdot 10^{-9}\text{C}}{5^2\text{m}^2} = 27 \text{ N/C}$$

$$E_2 = \frac{k \cdot |Q_2|}{r_2^2} = \frac{8,99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \cdot 8 \cdot 10^{-9}\text{C}}{3^2\text{m}^2} = 8 \text{ N/C}$$

De vector $\vec{E}_2$ heeft enkel een y-component, de vector $\vec{E}_1$ heeft zowel een x- als een y-component.

CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Elektrische velden

Nu kunnen we de vectoriële som $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ maken.

$$E_{tot,x} = E_{1,x} + E_{2,x} = -27 \cdot \frac{4}{5} = -21,6\ \mathrm{N/C}$$

$$E_{tot,y} = E_{1,y} + E_{2,y} = 27 \cdot \frac{3}{5} - 8 = 8,2\ \mathrm{N/C}$$

$$E_{tot} = \sqrt{E_{tot,x}^2 + E_{tot,y}^2} = \sqrt{21,6^2 + 8,2^2} = 23\ \mathrm{N/C}$$

$|Q_1|$ r_1^2

CC BY-NC-SA 4.0

9.4 Elektrische veldlijnen

Je kunt een elektrisch veld voorstellen door veldvectoren, maar meestal tekent men veldlijnen om een voorstelling te maken van het veld.

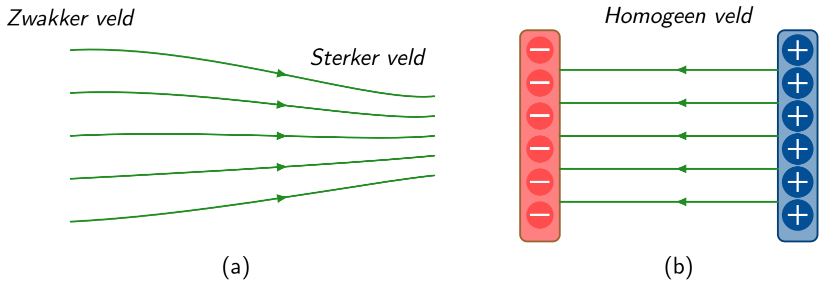
Definitie 9.4.1. Een elektrische veldlijn is een lijn die in elk punt ervan de richting en zin weergeeft van het elektrisch veld op die plaats.

De veldvector ligt in elk punt van de veldlijn op de raaklijn aan de veldlijn.

Als elektrische veldlijnen naar elkaar toekomen (convergeren), wordt het veld op die plaats sterker. Als elektrische veldlijnen zich van elkaar verwijderen (divergeren), wordt het veld op die plaats zwakker.

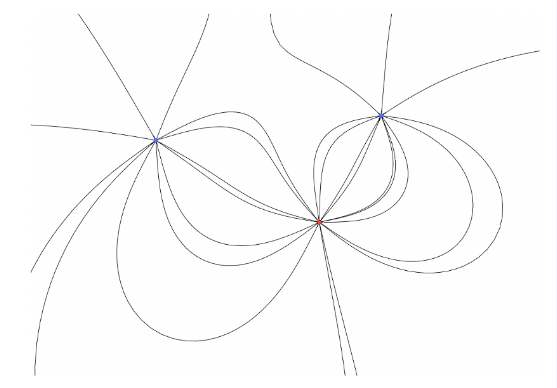
Als veldlijnen evenwijdig zijn, is de grootte van het veld daar hetzelfde.

Zo'n veld noemen we een homogeen veld. Tussen twee grote tegengesteld geladen platen zal het elektrisch veld homogeen zijn.



Figuur 66 – (a) Hoe korter de veldlijnen bij elkaar liggen, hoe sterker het veld. (b) Wanneer de veldlijnen evenwijdig zijn, noemen we het veld een homogeen veld.

Voorbeeld 9.4.1. Het veldlijnenpatroon veroorzaakt door drie puntladingen:



CC BY-NC-SA 4.0

9.5 Elektrische potentiële energie en potentiaal

9.5.1 Potentiële energie van een lading in een homogeen veld

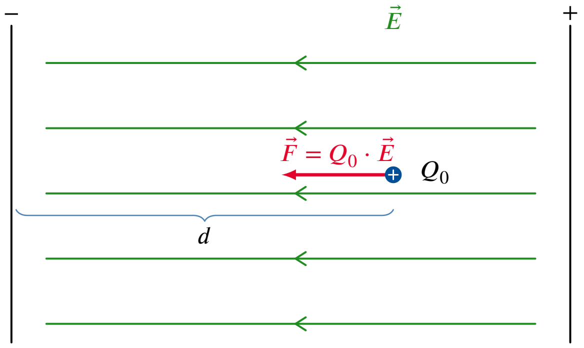
Gravitatiekrachten en elektrische krachten vertonen vele gelijkenissen. Het zijn beide conservatieve krachten. Er is dus een elektrische potentiële energie geassocieerd met de elektrische kracht net zoals er een gravitionele potentiële energie $E_p = mgh$ gerelateerd is aan de gravitatiekracht.

Beschouw een homogeen elektrisch veld $\vec{E}$ tussen twee tegengesteld geladen platen zoals getoond in figuur 67. Een positieve testlading Q_0 wordt geplaatst in dit veld en ondervindt een elektrische kracht $\vec{F} = Q_0 \cdot \vec{E}$ parallel aan en met dezelfde richting en zin als het elektrisch veld. Wanneer deze lading Q_0 verplaatst wordt over een afstand d in de richting van de negatieve plaat, zijn de verplaatsing en de elektrische kracht naar dezelfde kant gericht. De arbeid verricht door de elektrische kracht is bijgevolg positief.

$$W = Q_0 \cdot E \cdot d$$

Vermits $\Delta E_p = -W$ (zie 5.1) zal de potentiële energie van de lading veranderen met een waarde :

$$\Delta E_p = -W = -Q_0 \cdot E \cdot d$$



Figuur 67 – Kracht op een lading Q_0 in een homogeen elektrisch veld.

Eigenschap 9.5.1. De potentiële energie van een lading Q in een punt P op een afstand d van de negatieve plaat in een homogeen veld wordt gegeven door

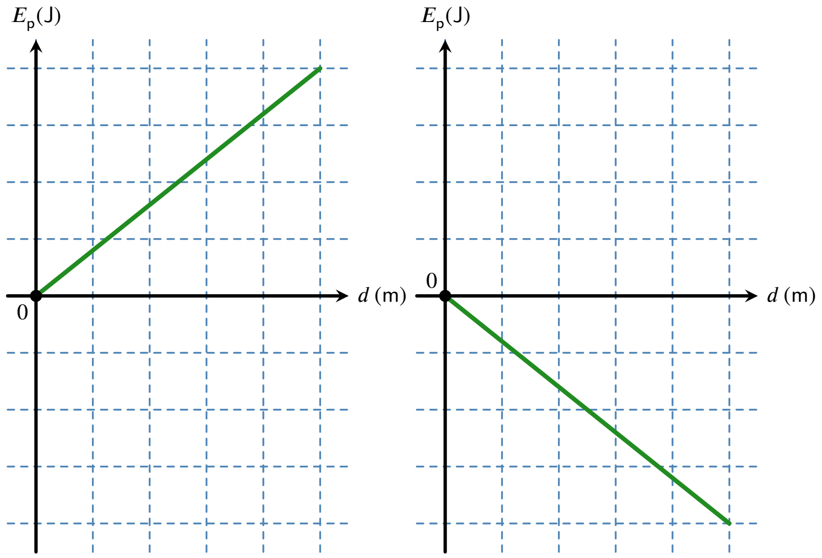
$$E_\mathrm{p} = Q \cdot E \cdot d.$$

als het referentiepunt (RP) op de negatieve plaat gekozen wordt.

De elektrische potentiële energie is dus gelijk aan de arbeid die de elektrische kracht verricht tijdens de verplaatsing naar het referentiepunt. Merk op dat de elektrische potentiële energie toeneemt met de afstand d net zoals de gravitationele potentiële energie toeneemt met de hoogte h.

De $E_\mathrm{p}(d)$ - grafiek is een rechte door 0. Indien je het algemeen voorschrift van een rechte door de oorsprong $y = ax$ vergelijkt met de formule $E_\mathrm{p} = Q \cdot E \cdot d$, dan zie je dat $Q \cdot E$ overeenkomt met de rico van de rechte. Afhankelijk van het teken van Q heb je dus een stijgende ($Q > 0$) of een dalende rechte ($Q < 0$).

CC BY-NC-SA 4.0



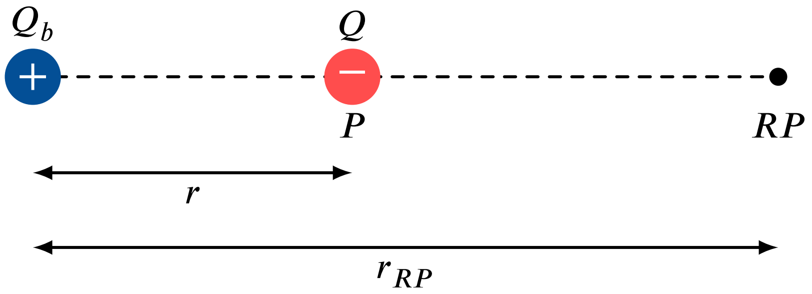
(a) $Q > 0$ (b) $Q < 0$

Figuur 68 – De potentiële energie van een (a) positieve lading Q of (b) een negatieve lading Q in een homogeen elektrisch veld.

9.5.2 Potentiële energie van een lading in een radiaal veld

Een bronlading Q_b creëert een radiaal veld.

Een lading Q in een punt P op een afstand r van lading Q_b bezit een hoeveelheid potentiële energie E_p.



Figuur 69 – Een lading Q bevindt zich op afstand r van een bronlading Q_b. De potentiële energie van lading Q wordt bepaald door het referentiepunt RP op oneindig te kiezen.

Men kan m.b.v. de arbeid geleverd door de Coulombkracht aantonen dat:

$$E_p = k \cdot Q \cdot Q_b \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{RP}} \right).$$

Kies je het referentiepunt (RP) op oneindig dan wordt de formule $E_p = \dfrac{k \cdot Q \cdot Q_b}{r}$.

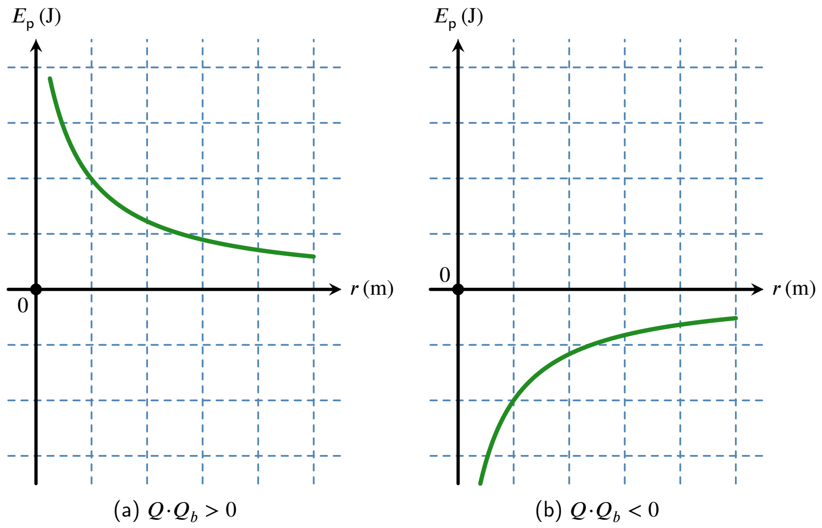
Eigenschap 9.5.2. De potentiële energie van een lading Q in een punt P op een afstand r van de bronlading Q_b wordt gegeven door

$$E_p = \frac{k \cdot Q \cdot Q_b}{r}$$

CC BY-NC-SA 4.0

als het referentiepunt (RP) op oneindig gekozen wordt.

De $E_\mathrm{p}(r)$ - grafiek is een hyperbool.



Figuur 70 – De potentiële energie van een lading Q in de buurt van een lading Q_b in het geval dat (a) beide ladingen hetzelfde teken hebben of (b) beide ladingen een verschillend teken hebben.

9.6 Potentiaal

De verhouding E_{pot}/Q is de **potentiële energie per coulomb**.

$$\frac{E_{pot}}{Q} = V.$$

Men noemt deze de potentiaal V in het punt P in het elektrisch veld. Het is een scalaire grootheid (een getal). Deze geeft aan hoeveel elektrische potentiële energie een lading van 1 coulomb krijgt als ze in dat punt P in het elektrisch veld wordt geplaatst.

Voor een homogeen veld is die verhouding

$$\frac{E_{pot}}{Q} = \frac{Q \cdot E \cdot d}{Q} = E \cdot d.$$

Voor een radiaal veld is die verhouding

$$\frac{E_{pot}}{Q} = \frac{k \cdot Q \cdot Q_b}{Q \cdot r} = \frac{k \cdot Q_b}{r}.$$

In beide gevallen hangt de verhouding enkel af van het elektrisch veld en van de ligging van het punt in het elektrisch veld. Dat geldt ook voor willekeurige velden.

Definitie 9.6.1. De potentiaal V in punt P in een elektrisch veld is

$$V = \frac{E_{pot}}{Q}.$$

Het is de *potentiële energie per coulomb*. Potentiaal wordt uitgedrukt in J/C.

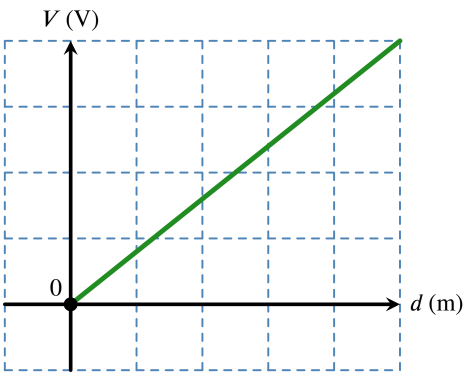
De eenheid 1 J/C noemt men de volt (V) naar Allesandro Volta

$$1\frac{\text{J}}{\text{C}} = 1\text{V}.$$

Voor een homogeen veld is de potentiaal in een punt P op een afstand d van de negatieve plaat:

$$V = E \cdot d.$$

De $V(d)$-grafiek is een rechte door de oorsprong. Hoe verder het punt van de negatieve plaat ligt, hoe groter de potentiaal.



Figuur 71 – De potentiaal in een homogeen elektrisch veld tussen twee tegengesteld geladen platen, gemeten op een afstand d van de negatieve plaat

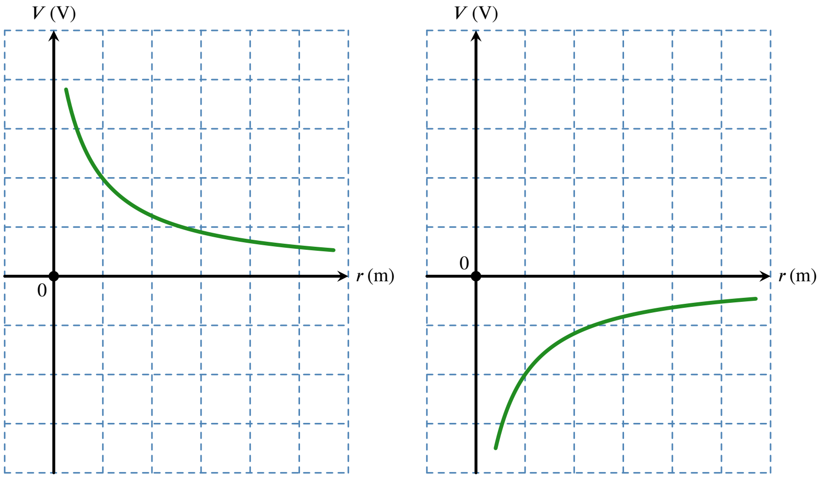
9.6 Potentiaal

Voor een radiaal veld is de potentiaal in een punt P op een afstand r van een bronlading Q_b:

$$V = \frac{k \cdot Q_b}{r}.$$

De $V(r)$-grafiek is een hyperbool.

Hoe verder het punt van de bronlading, hoe dichter de potentiaal bij nul ligt.



Figuur 72 – De potentiaal in het radiaal elektrisch veld van een bronlading Q_b, gemeten op een afstand r van de (a) positieve bronlading of (b) negatieve bronlading.

De potentiaal hangt - net zoals het elektrisch veld - niet af van de testlading in dat punt, maar enkel van het veld (de bronlading) en het punt P in kwestie.

9.6.1 Equipotentiaaloppervlakken

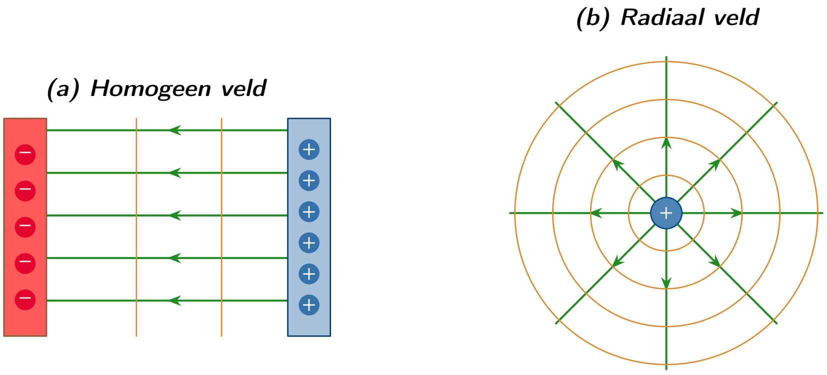
De potentiaal in een punt P in een homogeen veld is $V = E \cdot d$. Alle punten die op eenzelfde afstand d van de negatieve plaat liggen, hebben dezelfde potentiaal.

Definitie 9.6.2. Een oppervlak gevormd door punten met dezelfde potentiaal is een equipotentiaaloppervlak.

Bij een homogeen veld zijn de equipotentiaaloppervlakken vlakken die evenwijdig zijn met de platen.

CC BY-NC-SA 4.0

9.6 Potentiaal



Figuur 73 – Equipotentiaaloppervlakken (oranje) staan steeds loodrecht op de veldlijnen (groen) in een (a) homogeen veld of (b) radiaal veld.

De potentiaal in een punt in een radiaal veld is $V = \dfrac{k \cdot Q_b}{r}$. Alle punten die op eenzelfde afstand r van de bron lading liggen, hebben dezelfde potentiaal. De equipotentiaaloppervlakken zijn dus boloppervlakken die concentrisch rond de bron lading liggen. In een vlak tekenen we equipotentiaallijnen (zie figuur 73).

Eigenschap 9.6.1. Zowel bij een radiaal veld als bij een homogeen veld staan de veldlijnen loodrecht op de equipotentiaaloppervlakken. Dat geldt ook voor willekeurige velden.

CC BY-NC-SA 4.0

9.7 Oefeningen Elektrostatica

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

A) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

B) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

C) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

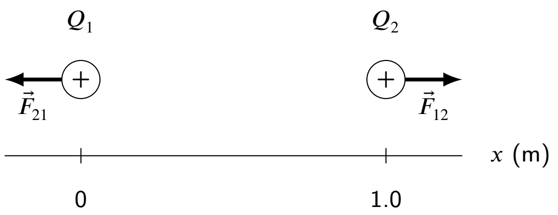
CC BY-NC-SA 4.0

9.7.A Instapoefeningen

9.7.A Instapoefeningen

Oefening 9.7.1. Twee ladingen van elk $5,0\ \mu C$ bevinden zich op $1,0$ m van elkaar. Hoe groot is de kracht die de ladingen op mekaar uitoefenen? Hoe is deze kracht gericht?

$$F = 0.225 \text{ N}$$



Uitwerking:

Een lading Q_1 oefent een kracht $\vec{F}_{12}$ uit op Q_2 naar rechts, terwijl lading Q_2 een kracht $\vec{F}_{21}$ uitoefent op Q_1 naar links. De wet van Coulomb geeft dan

$$F_{12} = F_{21} = \frac{k|Q_1||Q_2|}{r_{12}^2} = \frac{\left(8,99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2\right)\left(5 \cdot 10^{-6} \text{ C}\right)^2}{(1,0 \text{ m})^2} = 0,225 \text{ N}.$$

Oefening 9.7.2. Een elektron cirkelt in een waterstofatoom rond een proton op een afstand van $r = 0,053$ nm. Hoe groot is de elektrische veldsterkte, veroorzaakt door het proton, ter hoogte van het elektron?

$$E(r) = 5.1 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

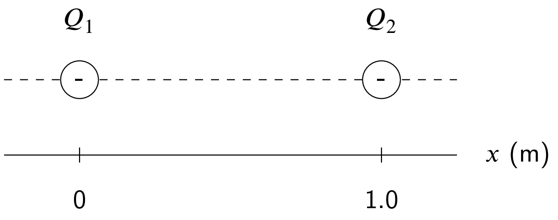
Uitwerking: In deze situatie is er één bronlading, het proton, verantwoordelijk voor het elektrisch veld waarin het elektron zich bevindt. De grootte van het radiaal veld op de positie van het elektron wordt dan gegeven door

$$E = \frac{k \cdot |Q|}{r^2} = 8,99 \cdot 10^9 \cdot \frac{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{\left(0,053 \cdot 10^{-9} \text{ m}\right)^2} = 5,1 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

CC BY-NC-SA 4.0

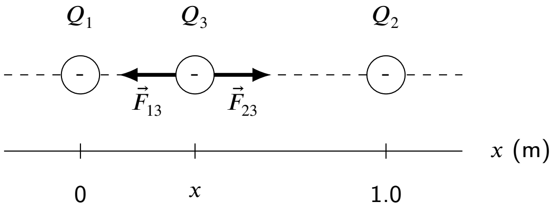
9.7.B Standaardoefeningen

Oefening 9.7.3. Twee negatieve ladingen Q_1 en Q_2 bevinden zich op vaste plaatsen op één meter van elkaar. Er geldt dat $Q_1 = -1{,}5$ C en $Q_2 = 4Q_1$. Op welke afstand van lading Q_1 kunnen we een positieve lading Q_3 op de stippellijn plaatsen zodat deze lading Q_3 in rust blijft?



$$x = 0.33 \text{ m}$$

Uitwerking: Op de lading Q_3 werken twee krachten: de kracht $\vec{F}_{13}$ van lading Q_1 op Q_3 en de kracht $\vec{F}_{23}$ van lading Q_2 op Q_3.



Opdat de lading Q_3 in rust kan zijn, moet deze zich tussen de twee ladingen bevinden en moet de som van deze krachten gelijk zijn aan nul. Hieruit volgt dat: $\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_{13} = -\vec{F}_{23} \Leftrightarrow F_{13} = F_{23}$

We vullen nu de formule voor de Coulombkracht in en vinden dan dat $k \cdot \dfrac{|Q_1| \cdot |Q_3|}{r_{13}^2} = k \cdot \dfrac{|Q_2| \cdot |Q_3|}{r_{23}^2} \Leftrightarrow$

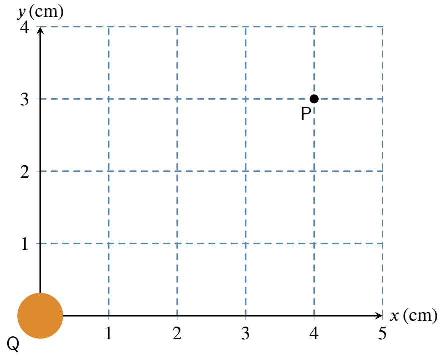
$$\frac{|Q_1|}{x^2} = \frac{|Q_2|}{(1{,}0 - x)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{4}{(1{,}0 - x)^2}$$

We lossen de vergelijking op en bekomen dat $x = 0{,}33$ m

Oefening 9.7.4. Bepaal de componenten van het elektrisch veld in punt P in de buurt van de bronlading Q van -10 nC.

CC BY-NC-SA 4.0

9.7.B Standaardoefeningen



$$\vec{E} = \left(-2.9 \cdot 10^4 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}};\ -2.2 \cdot 10^4 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \right)$$

Uitwerking: Aangezien het een negatieve puntlading betreft, wijzen de veldlijnen naar deze lading. De grootte van het elektrische veld kan bepaald worden met de volgende vergelijking:

$$E = k\frac{Q}{r^2} = \frac{\left(8,99 \cdot 10^9 \ \mathrm{Nm^2/C^2}\right)\left(10 \cdot 10^{-9} \ \mathrm{C}\right)}{\left(3 \cdot 10^{-2} m\right)^2 + \left(4 \cdot 10^{-2} m\right)^2} = 3,6 \cdot 10^4 \ \mathrm{N/C}$$

De componenten ten opzichte van het gekozen assenstelsel worden dan als volgt bepaald:

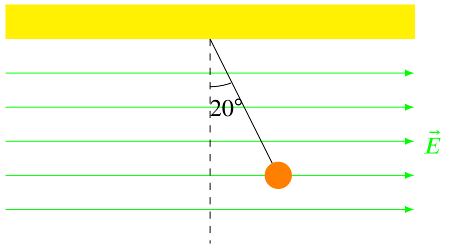
$$\begin{aligned}\vec{E} &= \left(-3,6 \cdot 10^4 \ \mathrm{N/C}\right)\left(\cos\theta \ \vec{e}_x + \sin\theta \ \vec{e}_y\right) = \left(-3,6 \cdot 10^4 \ \mathrm{N/C}\right)\left(\frac{4}{5}\vec{e}_x + \frac{3}{5}\vec{e}_y\right) \\ &= \left(-2,9 \cdot 10^4 \ \vec{e}_x - 2,2 \cdot 10^4 \ \vec{e}_y\right) \ \mathrm{N/C}\end{aligned}$$

Merk op dat beide componenten negatief zijn omdat het elektrisch veld tegen de x-as en tegen de y-as in wijst.

CC BY-NC-SA 4.0

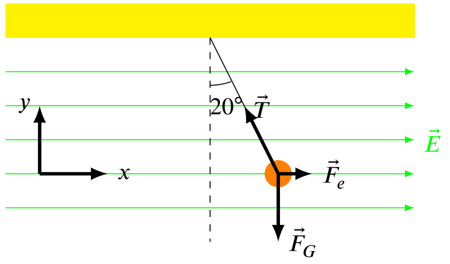
9.7.C Gevorderde oefeningen

Oefening 9.7.5. Een balletje met een massa van $5,0$ g hangt aan een touwtje in een homogeen elektrisch veld met veldsterkte $10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$, zoals weergegeven op de figuur. Het touwtje maakt een hoek van 20° met de verticale richting. Hoe groot is de lading op het balletje?



$$Q = 0.18\ \mu\mathrm{C}$$

Uitwerking: We tekenen de krachten op de figuur.



Aangezien de bal zich in een statische evenwichtstoestand bevindt, levert de tweede wet van Newton de volgende vergelijking op:

$$\vec{F}_{net} = \vec{T} + \vec{F}_G + \vec{F}_e = \vec{0}.$$

Hierin is $\vec{T}$ de spankracht in het touw, $\vec{F}_G$ de zwaartekracht en $\vec{F}_e$ de elektrische kracht op het balletje. We kiezen de x-as horizontaal naar rechts en de y-as verticaal naar boven. Voor de componenten wordt dit dan:

$$\left(F_{net}\right)_x = T_x + 0\ \mathrm{N} + Q \cdot E = 0\ \mathrm{N} \quad \left(F_{net}\right)_y = T_y - mg + 0\ \mathrm{N} = 0\ \mathrm{N}$$

Deze vergelijkingen vereenvoudigen we tot

$$T \sin 20° = Q \cdot E \quad T \cos 20° = mg$$

Door de linkse vergelijking te delen door de rechtse vergelijking, bekomen we het eindresultaat:

$$\tan 20° = \frac{Q \cdot E}{mg} \Rightarrow Q = \frac{mg \cdot \tan 20°}{E} = \frac{\left(5,0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}\right)(9,8\ \mathrm{N/kg}) \tan 20°}{10^5\ \mathrm{N/C}}$$
$$= 1,78 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C} = 0,18\ \mu\mathrm{C}$$

Oefening 9.7.6. Bij een blikseminslag ontstaat er kortstondig een elektrisch veld rond een inslaande lading van 15,0 C. Bereken het potentiaalverschil tussen de voor- en achterpoten van een paard. De

CC BY-NC-SA 4.0

9.7.C Gevorderde oefeningen

voorpoten staan op 100 m van de inslaande lading en de achterpoten staan op 101 m van de inslaande lading.

$$\Delta V = 0.01\ 10^9\ \text{V}$$

Uitwerking: De potentiaal ter hoogte van de voorpoten is $V_1 = k \cdot \frac{Q_b}{r} = 8{,}99 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{15,0\ \text{C}}{100\ \text{m}} = 1,35 \cdot 10^9\ \text{V}$

De potentiaal ter hoogte van de achterpoten is $V_2 = k \cdot \frac{Q_b}{r} = 8{,}99 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{15,0\ \text{C}}{101\ \text{m}} = 1,34 \cdot 10^9\ \text{V}$

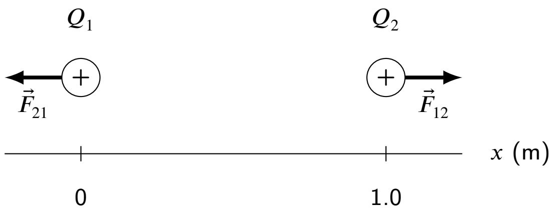
Bijgevolg is het potentiaalverschil gelijk aan $\Delta V = 0{,}01 \cdot 10^9$ V

CC BY-NC-SA 4.0

9.7.D Oefeningen Usolv-it

Oefening 9.7.7. Twee ladingen van elk $5,0\ \mu C$ bevinden zich op $1,0$ m van elkaar. Hoe groot is de kracht die de ladingen op mekaar uitoefenen? Hoe is deze kracht gericht?

$$F = 0.225 \text{ N}$$



Uitwerking:

Een lading Q_1 oefent een kracht $\vec{F}_{12}$ uit op Q_2 naar rechts, terwijl lading Q_2 een kracht $\vec{F}_{21}$ uitoefent op Q_1 naar links. De wet van Coulomb geeft dan

$$F_{12} = F_{21} = \frac{k|Q_1||Q_2|}{r_{12}^2} = \frac{\left(8,99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2\right)\left(5 \cdot 10^{-6} \text{ C}\right)^2}{(1,0 \text{ m})^2} = 0,225 \text{ N}.$$

Oefening 9.7.8. Een elektron cirkelt in een waterstofatoom rond een proton op een afstand van $r = 0,053$ nm. Hoe groot is de elektrische veldsterkte, veroorzaakt door het proton, ter hoogte van het elektron?

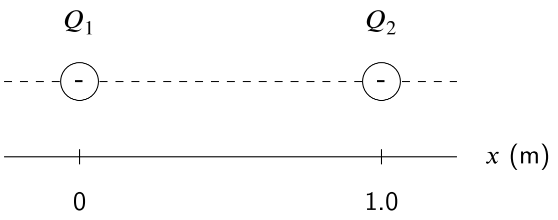
$$E(r) = 5.1 \cdot 10^{11}\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Uitwerking: In deze situatie is er één bronlading, het proton, verantwoordelijk voor het elektrisch veld waarin het elektron zich bevindt. De grootte van het radiaal veld op de positie van het elektron wordt dan gegeven door

$$E = \frac{k \cdot |Q|}{r^2} = 8,99 \cdot 10^9 \cdot \frac{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{\left(0,053 \cdot 10^{-9} \text{ m}\right)^2} = 5,1 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

9.7.D.1 Standaardoefeningen

Oefening 9.7.9. Twee negatieve ladingen Q_1 en Q_2 bevinden zich op vaste plaatsen op één meter van elkaar. Er geldt dat $Q_1 = -1,5$ C en $Q_2 = 4Q_1$. Op welke afstand van lading Q_1 kunnen we een positieve lading Q_3 op de stippellijn plaatsen zodat deze lading Q_3 in rust blijft?

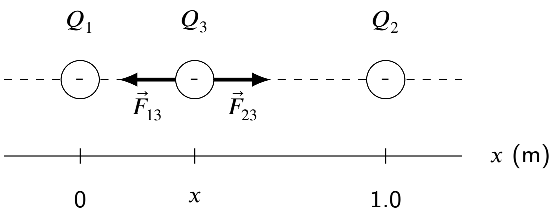


CC BY-NC-SA 4.0

9.7.D Oefeningen Usolv-it

$x = 0.33$ m

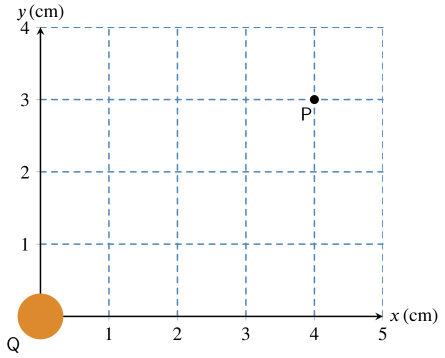
Uitwerking: Op de lading Q_3 werken twee krachten: de kracht $\vec{F}_{13}$ van lading Q_1 op Q_3 en de kracht $\vec{F}_{23}$ van lading Q_2 op Q_3.



Opdat de lading Q_3 in rust kan zijn, moet deze zich tussen de twee ladingen bevinden en moet de som van deze krachten gelijk zijn aan nul. Hieruit volgt dat: $\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_{13} = -\vec{F}_{23} \Leftrightarrow F_{13} = F_{23}$

We vullen nu de formule voor de Coulombkracht in en vinden dan dat $k \cdot \frac{|Q_1| \cdot |Q_3|}{r_{13}^2} = k \cdot \frac{|Q_2| \cdot |Q_3|}{r_{23}^2} \Leftrightarrow$
$\frac{|Q_1|}{x^2} = \frac{|Q_2|}{(1{,}0 - x)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{4}{(1{,}0 - x)^2}$
We lossen de vergelijking op en bekomen dat $x = 0{,}33$ m

Oefening 9.7.10. Bepaal de componenten van het elektrisch veld in punt P in de buurt van de bronlading Q van $-10\ nC$.



$$\vec{E} = \left(-2.9 \cdot 10^4 \ \frac{\text{N}}{\text{C}};\ -2.2 \cdot 10^4 \ \frac{\text{N}}{\text{C}} \right)$$

Uitwerking: Aangezien het een negatieve puntlading betreft, wijzen de veldlijnen naar deze lading. De grootte van het elektrische veld kan bepaald worden met de volgende vergelijking:

$$E = k\frac{Q}{r^2} = \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2)\,(10 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{(3 \cdot 10^{-2} m)^2 + (4 \cdot 10^{-2} m)^2} = 3,6 \cdot 10^4 \text{ N/C}$$

De componenten ten opzichte van het gekozen assenstelsel worden dan als volgt bepaald:

$$\vec{E} = (-3,6 \cdot 10^4 \text{ N/C})\,(\cos\theta\ \vec{e}_x + \sin\theta\ \vec{e}_y) = (-3,6 \cdot 10^4 \text{ N/C})\left(\frac{4}{5}\vec{e}_x + \frac{3}{5}\vec{e}_y\right)$$
$$= (-2,9 \cdot 10^4\ \vec{e}_x - 2,2 \cdot 10^4\ \vec{e}_y) \text{ N/C}$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.7.D Oefeningen Usolv-it

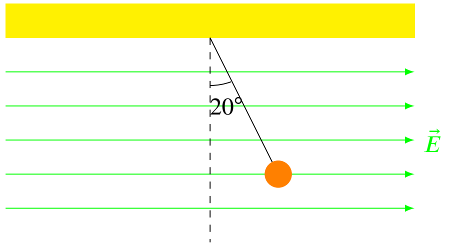
> Merk op dat beide componenten negatief zijn omdat het elektrisch veld tegen de x-as en tegen de y-as in wijst.

9.7.D.2 Gevorderde oefeningen

CC BY-NC-SA 4.0

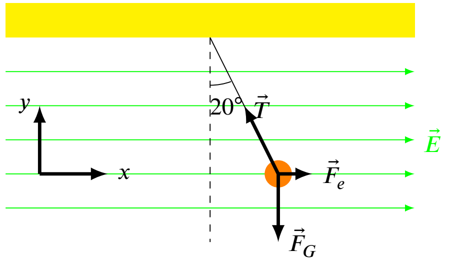
9.7.D Oefeningen Usolv-it

Oefening 9.7.11. Een balletje met een massa van $5,0$ g hangt aan een touwtje in een homogeen elektrisch veld met veldsterkte $10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$, zoals weergegeven op de figuur. Het touwtje maakt een hoek van 20° met de verticale richting. Hoe groot is de lading op het balletje?



$$Q = 0.18\ \mu\mathrm{C}$$

Uitwerking: We tekenen de krachten op de figuur.



Aangezien de bal zich in een statische evenwichtstoestand bevindt, levert de tweede wet van Newton de volgende vergelijking op:

$$\vec{F}_{net} = \vec{T} + \vec{F}_G + \vec{F}_e = \vec{0}.$$

Hierin is $\vec{T}$ de spankracht in het touw, $\vec{F}_G$ de zwaartekracht en $\vec{F}_e$ de elektrische kracht op het balletje. We kiezen de x-as horizontaal naar rechts en de y-as verticaal naar boven. Voor de componenten wordt dit dan:

$$\left(F_{net}\right)_x = T_x + 0\ \mathrm{N} + Q \cdot E = 0\ \mathrm{N} \qquad \left(F_{net}\right)_y = T_y - mg + 0\ \mathrm{N} = 0\ \mathrm{N}$$

Deze vergelijkingen vereenvoudigen we tot

$$T \sin 20° = Q \cdot E \qquad T \cos 20° = mg$$

Door de linkse vergelijking te delen door de rechtse vergelijking, bekomen we het eindresultaat:

$$\tan 20° = \frac{Q \cdot E}{mg} \Rightarrow Q = \frac{mg \cdot \tan 20°}{E} = \frac{\left(5,0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}\right)(9,8\ \mathrm{N/kg}) \tan 20°}{10^5\ \mathrm{N/C}}$$
$$= 1,78 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C} = 0,18\ \mu\mathrm{C}$$

Oefening 9.7.12. Bij een blikseminslag ontstaat er kortstondig een elektrisch veld rond een inslaande lading van 15,0 C. Bereken het potentiaalverschil tussen de voor- en achterpoten van een paard. De voorpoten staan op 100 m van de inslaande lading en de achterpoten staan op 101 m van de inslaande

CC BY-NC-SA 4.0

lading.

$$\Delta V = 0.01\ 10^9\ \text{V}$$

Uitwerking: De potentiaal ter hoogte van de voorpoten is $V_1 = k\cdot\frac{Q_b}{r} = 8{,}99\cdot10^9\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{15{,}0\ \text{C}}{100\ \text{m}} = 1{,}35\cdot10^9\ \text{V}$

De potentiaal ter hoogte van de achterpoten is $V_2 = k\cdot\frac{Q_b}{r} = 8{,}99\cdot10^9\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{15{,}0\ \text{C}}{101\ \text{m}} = 1{,}34\cdot10^9\ \text{V}$

Bijgevolg is het potentiaalverschil gelijk aan $\Delta V = 0{,}01\cdot10^9\ \text{V}$

9.7.D.3 Usolv-it oefeningen

Oefening 9.7.13. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over elektrostatica via het Usolv-it oefenplatform.

10.1 Intro elektrodynamica

In vorig hoofdstuk leerde je hoe een elektrische veld een (aantrekkende of afstotende) elektrische kracht uitoefent op een elektrische lading. In dit hoofdstuk leer je hoe dit fenomeen tegelijkertijd kan plaatsvinden op massaal veel elementaire ladingen (elektronen) die aanwezig zijn in een materiaal. Als dit gebeurt, zeggen we dat er een elektrische stroom door het materiaal vloeit. Die elektrische stroom kunnen we gebruiken om elektrische apparaten te laten werken.

CC BY-NC-SA 4.0

10.2 Elektrische spanning

10.2.1 Definitie

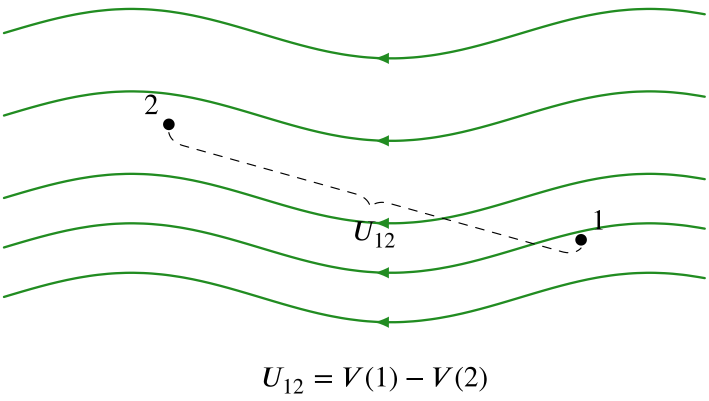
In tegenstelling tot elektrische veldsterkte of potentiaal is spanning een grootheid die je kent uit het dagelijks leven: bv. de batterij in je mobiele telefoon geeft een spanning van $3,7$ V, een autobatterij geeft een spanning van ongeveer 12 V, de netspanning is 230 V ...

Definitie 10.2.1. De spanning U_{12} tussen twee punten 1 en 2 in een elektrisch veld is het potentiaalverschil tussen die twee punten:

$$U_{12} = V(1) - V(2).$$

Spanning wordt uitgedrukt in volt (V).

Je kan dus maar van spanning spreken als er ook sprake is van een elektrisch veld, of dus als er ladingen in de buurt zijn.

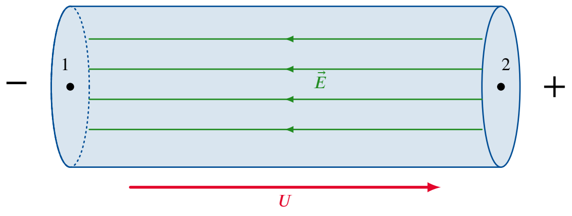


Figuur 74 – Spanning tussen twee punten van een elektrisch veld.

Spanning meet je altijd tussen twee punten. Om weer te geven welk punt op de hoogste potentiaal is, gebruiken we de spanningspijl.

Definitie 10.2.2. De spanningspijl wijst naar het punt met de hoogste potentiaal.

We bekijken als voorbeeld het homogeen veld in een geleidende draad. Punten in vlak 2 hebben de hoogste potentiaal. De spanningspijl U wijst dus naar 2. Merk op dat de spanningspijl steeds tegengesteld is aan de zin van de veldlijnen.



Figuur 75 – De spanningspijl wijst tegengesteld aan de veldlijnen.

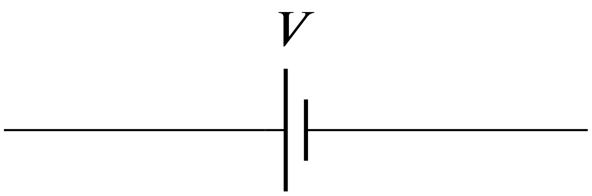
10.2.2 Spanningsbronnen

Een batterij, een labovoeding en een elektriciteitscentrale zijn voorbeelden van spanningsbronnen.

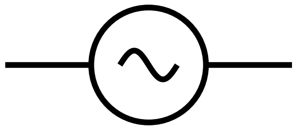
CC BY-NC-SA 4.0

Definitie 10.2.3. Een spanningsbron is een toestel dat zorgt voor een potentiaalverschil tussen de twee polen van de bron.

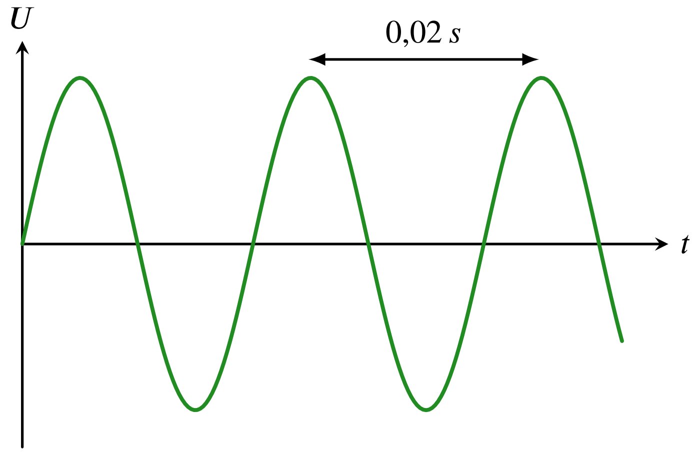
Als de spanning constant is, zoals bij een batterij, dan spreken we van gelijkspanning (DC = Direct Current). Een gelijkspanningsbron heeft een plus- en een minpool. De pluspool is de pool met de hoogste potentiaal.



Als de spanning sinusoïdaal verandert, zoals bij de netspanning, spreken we van een wisselspanning (AC = Alternating Current). De plus- en de minpool van een wisselspanningsbron wisselt voortdurend van kant.



De frequentie waarmee dat gebeurt bij de netspanning, bedraagt in Europa 50 Hz: d.w.z. er zijn 50 cycli per seconde, dus 100 keer per seconde bedraagt de spanning 0 V!



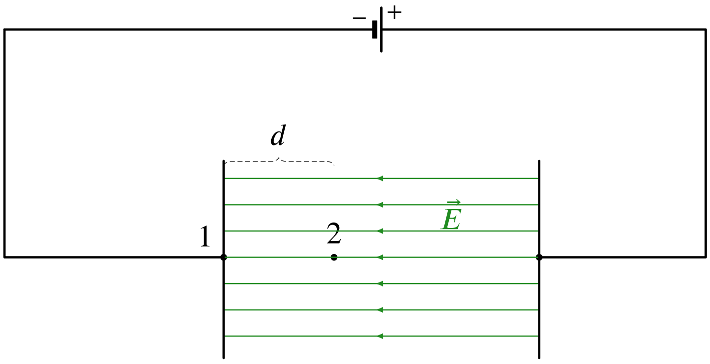
Figuur 76 – De spanning van het elektriciteitsnet heeft een frequentie van 50 cycli per seconde. Elke cyclus duurt dus $0,02$ s.

10.2.3 Spanning tussen twee punten in een homogeen veld

Beschouw twee grote verticale geleidende platen die je aansluit op een bron. Tussen de platen ontstaat een homogeen elektrisch veld. De bron houdt dit veld constant.

CC BY-NC-SA 4.0

10.2 Elektrische spanning



We nemen punt 1 op de plaat die aangesloten is op de minpool van de batterij. Punt 2 nemen we in het homogeen veld op een afstand d van punt 1. We gebruiken de formule voor de potentiaal van een punt in een homogeen veld en vinden dat

$$V(2) = E \cdot d.$$

De spanning U tussen punt 2 en de negatieve pool is

$$\begin{aligned} U &= V(2) - V(1) \\ &= E \cdot d - E \cdot 0 \\ &= E \cdot d \end{aligned}$$

Hoe groter d, hoe groter de spanning U.

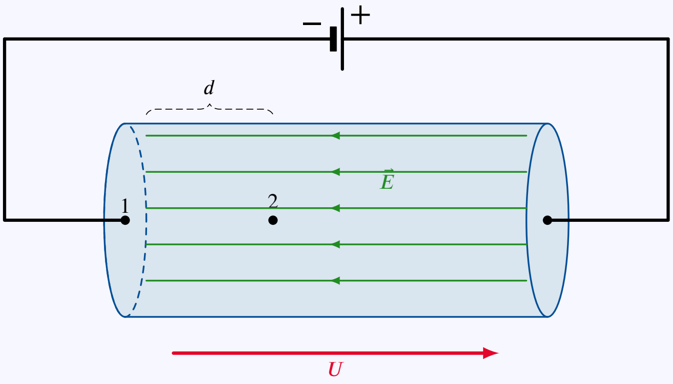
(a) De spanning neemt dus van de min-pool naar de plus-pool lineair toe.

(b) De spanning wordt maximaal $E \cdot \ell$ (met ℓ de afstand tussen de twee platen).

(c) Hoe sterker het veld, hoe groter de spanning (en omgekeerd: hoe sterker de spanning, hoe sterker het veld in de geleider).

Voorbeeld 10.2.1. Als je een geleidende draad op een batterij aansluit, ontstaat er in die draad een homogeen elektrisch veld met grootte E.

Als de batterij een spanning geeft van 12 V en de lengte van de draad is 10 cm, hoe groot is dan de spanning tussen de minpool (punt 1) en een punt op 2,3 cm van de minpool?



10.2 Elektrische spanning

Uitwerking: De spanning tussen de twee punten is gelijk aan:

$$\begin{aligned} U &= V(2) - V(1) \\ &= E \cdot d - E \cdot 0 \\ &= E \cdot d \\ &= \frac{U_{bron}}{\ell} \cdot d \\ &= \frac{12V}{0,10\ m} \cdot 0,023\ m \\ &= 2,8\ V \end{aligned}$$

10.2.4 Spanning tussen punten in een radiaal veld

Beschouw twee punten in de buurt van een puntlading Q_b, die een radiaal elektrisch veld opwekt. Punt 1 bevindt zich op een afstand r_1 en punt 2 bevindt zich op een afstand r_2 van de bron.

De spanning tussen deze twee punten is dan

$$U_{12} = V(1) - V(2).$$

De potentiaal in een punt in een radiaal veld is

$$V = \frac{k \cdot Q_b}{r}.$$

Bijgevolg geldt dat

$$\begin{aligned} U_{12} &= \frac{k \cdot Q_b}{r_1} - \frac{k \cdot Q_b}{r_2} \\ &= k \cdot Q_b \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \end{aligned}$$

Voorbeeld 10.2.2. Bij een blikseminslag ontstaat er kortstondig een elektrisch veld rond een inslaande lading van 15 C. Bereken de spanning U_{12} tussen punt 1 op 50 m en punt 2 op 52 m van de inslaande lading.

Uitwerking: De spanning wordt gegeven door

$$\begin{aligned} U_{12} &= k \cdot Q_b \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \\ &= 8,99 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot 15C \cdot \left(\frac{1}{50\ m} - \frac{1}{52\ m}\right) \\ &= 10 \cdot 10^7\ V \end{aligned}$$

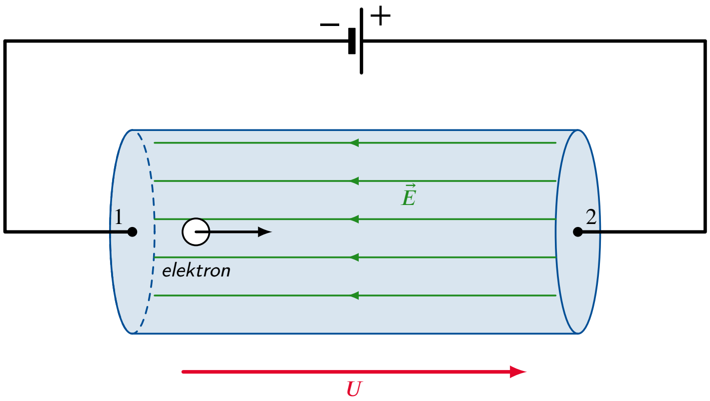
Merk op hoe extreem groot de spanning is tussen twee punten die zich kortbij de blikseminslag bevinden.

10.2.5 Betekenis van de elektrische spanning tussen twee punten

Beschouw een geleidende draad die aangesloten is op een spanningsbron.

CC BY-NC-SA 4.0

10.2 Elektrische spanning



De spanning tussen 1 en 2 is volgens de definitie van potentiaal

$$\begin{aligned} U_{12} &= V(1) - V(2) \\ &= \frac{E_{pot}(1)}{Q} - \frac{E_{pot}(2)}{Q} \\ &= -\frac{\Delta E_{pot}}{Q} \end{aligned}$$

Voor een lading Q die van 1 naar 2 beweegt, geldt de wet van behoud van mechanische energie:

$$\begin{aligned} E_{pot}(1) + E_{kin}(1) &= E_{pot}(2) + E_{kin}(2) \\ &\Updownarrow \\ E_{pot}(1) - E_{pot}(2) &= E_{kin}(2) - E_{kin}(1) \\ &\Updownarrow \\ -\Delta E_{pot} &= \Delta E_{kin} \end{aligned}$$

Je kan dus ook schrijven dat $U_{12} = \dfrac{\Delta E_{kin}}{Q}$.

Eigenschap 10.2.1. De spanning U_{12} tussen twee punten 1 en 2 geeft de verandering van de kinetische energie per eenheid van lading die van 1 naar 2 beweegt:

$$U_{12} = \frac{\Delta E_{kin,1\to 2}}{Q}.$$

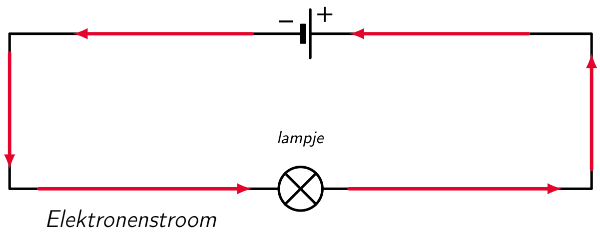
Voorbeeld 10.2.3. Je sluit een lampje aan op een batterij van $1,5$ V ($= 1,5$ J/C). Dit betekent dat de batterij aan een lading van 1 Coulomb die van de min- naar de pluspool beweegt een energie van $1,5$ J meegeeft.

CC BY-NC-SA 4.0

10.3 Elektrische stroom

10.3.1 Definitie van elektrische stroom

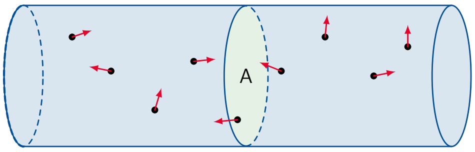
Als je een lampje aansluit op een batterij met behulp van geleidende draden ontstaat een elektrische schakeling. De elektronen bewegen van de minpool van de batterij via de geleidende draden naar het lampje en stromen door het lampje naar de pluspool toe.



Deze stroming van ladingen noemt men een elektrische stroom.

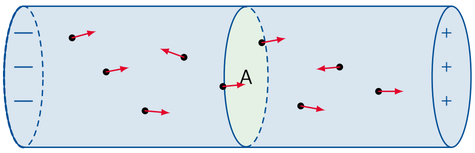
Definitie 10.3.1. Door een geleider loopt een elektrische stroom als de vrije elektronen zich *globaal* naar één kant verplaatsen.

Waarom *globaal*? In een geleider bewegen de vrije elektronen voortdurend in alle richtingen. De geleider zit dus vol bewegende ladingen en toch loopt er geen stroom. Dit komt omdat er door de doorsnede A per seconde gemiddeld evenveel elektronen van links naar rechts als van rechts naar links bewegen.



Geen stroom

Wel stroom



Van zodra er gemiddeld meer elektronen naar één kant gaan dan naar de andere kant, spreekt men van een elektrische stroom.

Om een stroom te hebben tussen twee punten, moet er aan twee voorwaarden voldaan zijn:

(a) er moet een elektrisch veld, dus een potentiaalverschil (spanning) zijn tussen die twee punten. Om de stroom in stand te houden, moet de spanning tussen de punten onderhouden worden en kun je bv. een bron gebruiken.

(b) in de ruimte tussen de twee punten moeten er vrije ladingen zijn. Hier zijn dat de vrije elektronen in de geleider.

CC BY-NC-SA 4.0

10.3 Elektrische stroom

Definitie 10.3.2. De stroomsterkte (of kortweg de stroom) I door een doorsnede A van een geleider is de hoeveelheid lading die per seconde door de doorsnede A stroomt

$$I = \frac{|Q|}{\Delta t}.$$

Stroom wordt uitgedrukt in C/s. De eenheid 1 C/s noemt men de ampère (A).

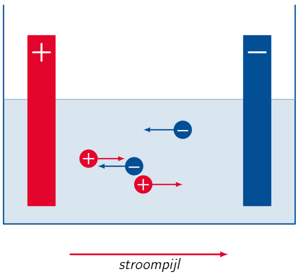
$$1\frac{C}{s} = 1\,A.$$

Hoe meer lading in een tijd Δt door de geleider stroomt, hoe groter de stroomsterkte I. Uit de definitie volgt ook dat de stroomsterkte altijd positief is.

Voorbeeld 10.3.1. Typische grootte van enkele stromen (in A)

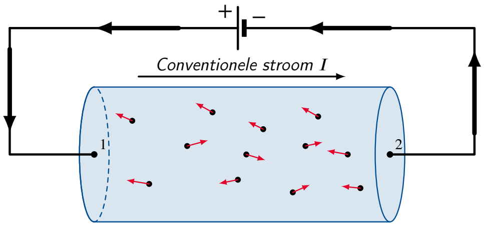
Gloeilamp	$0,1 - 0,5$ A
Strijkijzer	5 A
Wasmachine	10 A
Startmotor auto	60 A
Elektrische kraan	150 A
Trein	400 A

In een stroomvoerende geleider verplaatsen zich enkel vrije elektronen. Bij een stroom in een vloeistof, een gas of in een batterij verplaatsen zich zowel positieve als negatieve ladingen. Die ionen bewegen in tegengestelde zin t.o.v. elkaar. Om de stroomzin voor te stellen gebruikt men de stroompijl.



Definitie 10.3.3. De stroompijl geeft de zin waarin de positieve ladingen bewegen (of zouden bewegen). We noemen dat de conventionele stroomzin. In een stroomvoerende geleider bewegen de vrije elektronen in tegengestelde zin van de stroompijl.

De definitie van de conventionele stroomzin dateert van de tijd toen men dacht dat elektrische stroom een verplaatsing van positieve ladingen was.



CC BY-NC-SA 4.0

10.4 Elektrische weerstand

10.4.1 Wat is elektrische weerstand?

Het woord *weerstand* heeft verschillende betekenissen:

(a) In een elektronicawinkel kan je weerstanden kopen.

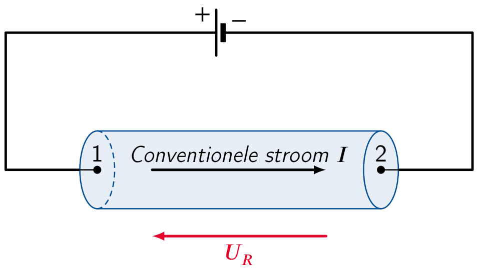
(b) In een broodrooster lichten weerstanden op en roosteren ze het brood.

(c) Als je een bad genomen hebt en je huid is nog vochtig, dan is de weerstand van je huid erg laag, waardoor je kwetsbaarder bent voor elektrocutie.

In deze voorbeelden wordt het begrip (elektrische) weerstand gebruikt in twee betekenissen: in de eerste twee voorbeelden wordt een voorwerp (een 'component') bedoeld, zoals die in vele elektrische toestellen gebruikt wordt in het laatste voorbeeld wordt de fysische grootheid weerstand, symbool R bedoeld.

Wat verstaan we onder de fysische grootheid 'weerstand'?

We bekijken onderstaande opstelling:



Figuur 77 – De stroompijl en spanningspijl wijzen bij een weerstand tegengesteld aan mekaar.

Tussen de punten 1 en 2 is een draad gespannen (een 'weerstand'). De spanning U_{12} is

$$U_{12} = V(1) - V(2).$$

De bron houdt die spanning constant. Punt 1 is met de pluspool van de bron verbonden en heeft de hoogste potentiaal. Bijgevolg is de spanning U_{12} positief. Die positieve spanning noemen we de spanning over de weerstand, symbool U_R. Als er geen verwarring mogelijk is, gebruiken we gewoon U.

Doordat de kring gesloten is, loopt er een stroom door de weerstandsdraad. Is de draad een goede geleider, dan stroomt een grote stroom door de draad. Bij andere draden is de stroom minder groot omdat de draad een slechte geleider is.

Meestal beschouwt men niet de geleiding G van een draad, maar de (elektrische) weerstand R. Dat is het omgekeerde van de geleiding.

Eigenschap 10.4.1. De (elektrische) weerstand R van een draad is de verhouding van de spanning U, over de draad tot de stroomsterkte I:

$$R = \frac{U_R}{I} \qquad \text{of} \qquad R = \frac{1}{G}.$$

De weerstand R is altijd positief. Ze wordt uitgedrukt in V/A.

De eenheid 1 V/A noemt men de ohm (Ω) naar Georg Simon Ohm (1767-1854)

$$1\frac{V}{A} = 1\Omega.$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.4 Elektrische weerstand

De weerstand van een draad is de spanning die nodig is per ampère stroomsterkte.

Symbool:

Voorbeeld 10.4.1. $R = 60\ \Omega = 60$ V/A: er is een spanning nodig van 60 V om een stroom van 1 A door de draad te laten lopen. Hoe groter de weerstand van een draad, hoe meer spanning nodig is om een bepaalde stroom te krijgen.

Uit de definitie volgt dat weerstand - net zoals spanning - altijd gemeten wordt tussen twee punten.

Voorbeeld 10.4.2. Typische waarde van de weerstand van enkele systemen:

(a) verwarmingselement wasmachine: $40\ \Omega$.

(b) verlengsnoer: $0,1$ à $0,3\ \Omega$.

(c) fietslampje: $2\ \Omega$.

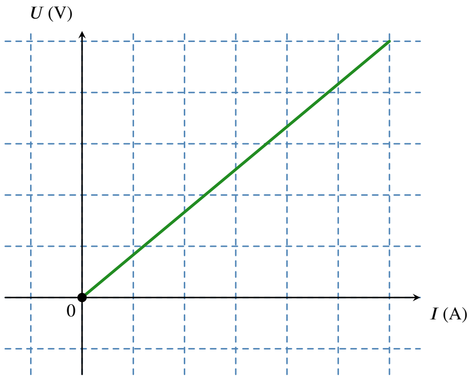
10.4.2 De wet van Ohm

We onderzoeken het verband tussen de stroom I door en de spanning U over een component. We gebruiken een regelbare bron.

Onderzoek van een weerstand of geleider

We meten bij verschillende waarden voor de stroom *door* de weerstand de waarde van de spanning *over* de weerstand.

I (A)	U (V)
0.00	0.00
0.04	4.92
0.09	10.80
0.14	16.4



Dit betekent dat

$$U \sim I \qquad \text{en dus} \qquad \frac{U}{I} = \text{cte.}$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.4 Elektrische weerstand

Vermits $U/I = R$ betekent dit

$$R = \text{cte}.$$

De geleiding of weerstand hangt niet af van de spanning die over de weerstand staat. Dit blijkt ook uit de grafiek: de helling is overal even groot. De helling van de $U(I)$-grafiek is een maat voor de weerstand.

Definitie 10.4.1. De relatie $I \sim U$ noemt men de **wet van Ohm**.

Materialen die hieraan voldoen, houden de weerstand constant terwijl er een stroom door loopt en een spanning over staat. Men noemt ze ohmse weerstanden of lineaire weerstanden.

Opmerking 10.4.1. (a) Halfgeleiders voldoen niet aan de wet van Ohm. Hun weerstand hangt af van de spanning die erover is aangelegd.

(b) Dikwijls vind je de wet van Ohm uitgedrukt als $U = R \cdot I$. Dat kan voor verwarring zorgen met de definitie van weerstand: $R = \dfrac{U}{I} \Leftrightarrow U = R \cdot I$.

(c) Voor de meeste geleiders geldt de wet van Ohm slechts als de temperatuur constant is. Het lijkt logisch te zijn dat bij een hogere temperatuur de weerstand toeneemt. Bij de meeste materialen is dat zo: de moleculen gaan harder trillen, waardoor de elektronen moeilijker doorheen het materiaal kunnen bewegen. Bij constante temperatuur gebeurt dit niet: als de spanning toeneemt, wordt het elektrisch veld sterker in de draad, waardoor de elektronen sneller naar de positieve pool bewegen. De stroom is dan recht evenredig met de spanning. De weerstand blijft constant.

10.4.3 De wet van Pouillet

Via de wet van Ohm kan je door stroom en spanning te meten een waarde voor de weerstand van een stukje materiaal bepalen. Indien je een evenredigheidsconstante kan bepalen die de rechte evenredigheid tussen stroom en spanning bepaalt, ken je ook de weerstand van het opgemeten materiaal.

Er bestaat nog een tweede techniek om voor een zuivere stof de weerstand te bepalen. Daarom vragen we ons af welke factoren de weerstand R van een draadvormige geleider bepalen.

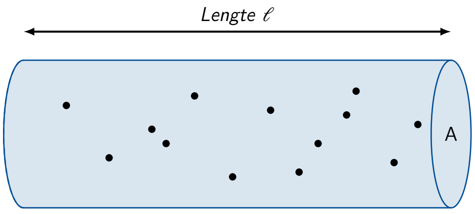
Experimenteel kan je afleiden dat

(a) de weerstand R recht evenredig is met de lengte ℓ van de draad:

$$R \sim \ell.$$

(b) de weerstand R omgekeerd evenredig is met de doorsnede A van de draad:

$$R \sim \frac{1}{A}.$$



Hieruit volgt

$$R \sim \frac{\ell}{A} \Rightarrow R = \text{cte} \cdot \frac{\ell}{A}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.4 Elektrische weerstand

Als je die constante bepaalt, vind je dat ze afhangt van het materiaal waaruit de draad gemaakt is. Men noemt die constante de specifieke weerstand van het materiaal, symbool ρ.

De specifieke weerstand van een materiaal wordt uitgedrukt in $\Omega \cdot m$.

Hoe kleiner ρ, hoe beter geleidend het materiaal is.

Eigenschap 10.4.2. Voor een draad met lengte ℓ, doorsnede A en specifieke weerstand ρ wordt de weerstand R gegeven door

$$R = \rho \cdot \frac{\ell}{A}.$$

Dit is de **wet van Pouillet**.

Opmerking: verwar de diameter van de draad niet met de doorsnede. De diameter is een lengte, de doorsnede een oppervlakte!

Voorbeeld 10.4.3.

Specifieke weerstand bij kamertemperatuur ($\Omega \cdot m$)

Aluminium	$2,7 \cdot 10^{-8}$	Koolstof	$30 \cdot 10^{-8}$
Constantaan	$49 \cdot 10^{-8}$	Germanium	$0,46$
Goud	$2,4 \cdot 10^{-8}$	Silicium	650
Ijzer	$10 \cdot 10^{-8}$		
Koper	$1,7 \cdot 10^{-8}$	Eboniet	$10^{12} - 10^{13}$

CC BY-NC-SA 4.0

10.5 Warmte en vermogen in een weerstand

10.5.1 Warmte-ontwikkeling in een weerstand

Als een elektrische stroom door een weerstand gaat, wordt in die weerstand warmte ontwikkeld. In het dagelijkse leven wordt daar veel gebruik van gemaakt: denk maar aan een haardroger, een broodrooster, een elektrische kookplaat, een strijkijzer ...

Eigenschap 10.5.1. De warmtehoeveelheid Q_w die ontwikkeld wordt in een weerstand R, waarover een spanning U staat en gedurende een tijd Δt een stroom I loopt, is

$$Q_w = U \cdot I \cdot \Delta t.$$

10.5.2 Vermogen ontwikkeld in een weerstand

Het vermogen P van een systeem is de hoeveelheid energie die door het systeem wordt omgezet per tijdseenheid:

$$P = \frac{E_{\text{omgezet}}}{\Delta t}.$$

Vermogen wordt uitgedrukt in J/s. De eenheid $1\frac{J}{s}$ is 1 watt:

Hier wordt elektrische energie omgezet in warmte en dus

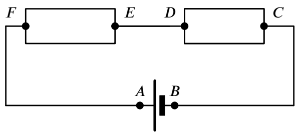
$$\begin{aligned} P &= \frac{Q_w}{\Delta t} \\ &= \frac{U \cdot I \cdot \Delta t}{\Delta t} = U \cdot I \end{aligned}$$

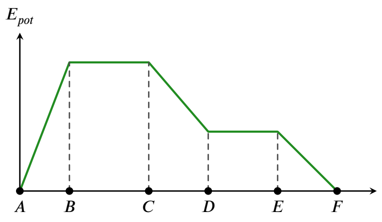
Eigenschap 10.5.2. Het vermogen ontwikkeld in een weerstand R waarover een spanning U staat en waar een stroom I doorloopt is

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}.$$

10.5.3 Energie-omzettingen in een kring met een weerstand

We bekijken de veranderingen van de potentiële energie voor een elektron dat de onderstaande kring doorloopt.





(a) Tussen A en B winnen de elektronen potentiële energie.

(b) De draad tussen B en C, D en E, F en A beschouwen als zonder weerstand: de elektronen behouden hun potentiële energie.

(c) Tussen C en D passeren de elektronen de weerstand en verliezen potentiële energie, net als tussen E en F.

10.5 Warmte en vermogen in een weerstand

Eigenschap 10.5.3. In de weerstand verliezen de elektronen potentiële energie, ze zetten die om in kinetische energie en er ontstaat warmte. In de bron krijgen de elektronen potentiële energie. De arbeid die daarvoor nodig is, wordt door de bron geleverd.

CC BY-NC-SA 4.0

10.6 Oefeningen Elektrodynamica

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

A) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

B) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

C) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

10.6.A Instapoefeningen

Oefening 10.6.1. Twee punten liggen op dezelfde veldlijn in een homogeen veld met veldsterkte $2000 \frac{N}{C}$ op $5,0$ cm van elkaar. Bepaal de spanning tussen die twee punten.

$$U_{21} = 100\ V$$

Uitwerking: De spanning tussen twee punten wordt gegeven door

$$U_{21} = V(2) - V(1),$$

waarbij $V(1)$ de potentiaal in het ene punt en $V(2)$ de potentiaal in het andere punt is. De potentiaal in een punt van een homogeen elektrisch veld wordt gegeven door

$$V = E \cdot d,$$

waarbij d de afstand tot de negatieve plaat voorstelt. Dit kan ingevuld worden in de vergelijking voor de spanning en omgevormd worden tot een vergelijking die de afstand tussen de twee punten bevat:

$$U_{21} = E \cdot d_2 - E \cdot d_1 = E \cdot \left(d_2 - d_1\right) = 2000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \cdot 0,050\ \mathrm{m} = 100\ \mathrm{V}$$

Oefening 10.6.2. De stroom in een haardroger is $2,0$ A. Hoeveel elektronen stromen doorheen de haardroger in $10,0$ minuten?

$$N = 7.5 \cdot 10^{21} \text{elektronen}$$

Uitwerking: De formule voor de stroomsterkte kan omgevormd worden tot een vergelijking voor de hoeveelheid lading die geleverd wordt:

$$|Q| = I \cdot \Delta t = (2,0\ \mathrm{A})\,(10 \cdot 60\ \mathrm{s}) = 1,2 \cdot 10^3\ \mathrm{C}.$$

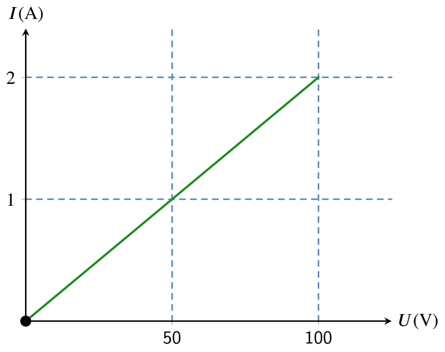
Het aantal elektronen N dat door de haardroger stroomt, wordt dan gegeven door

$$N = \frac{|Q|}{e} = \frac{1,2 \cdot 10^3\ \mathrm{C}}{1,6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}} = 7,5 \cdot 10^{21}$$

Oefening 10.6.3. Na het opmeten van de stroom doorheen een materiaal bij verschillende waarden van de aangelegde spanning over het materiaal, bekom je onderstaande grafiek. Wat is de weerstand van dit materiaal?

CC BY-NC-SA 4.0

10.6.A Instapoefeningen



$$R = 50\ \Omega$$

Uitwerking: De rico van de curve van stroom als functie van spanning is volgens de wet van Ohm het inverse van de weerstand R. Van de grafiek in de figuur kunnen we afleiden dat de weerstand van het materiaal gegeven wordt door

$$\frac{\Delta V}{I} = \frac{100\ \text{V}}{2\ \text{A}} = 50\Omega$$

10.6.B Standaardoefeningen

Oefening 10.6.4. Twee draden zijn van hetzelfde materiaal gemaakt, maar de eerste draad is drie keer zo lang en de diameter is drie keer zo groot als de tweede draad. Wat is de verhouding $\frac{R_2}{R_1}$ van weerstanden van deze twee draden?

Uitwerking: De wet van Pouillet geeft het verband tussen de weerstand van een draad met de lengte en doorsnede van diezelfde draad:

$$R = \frac{\rho \ell}{A} = \frac{\rho \ell}{\pi r^2},$$

waarbij gebruik gemaakt werd van de oppervlakte van een cirkel. Vermits beide draden dezelfde specifieke weerstand ρ hebben, kan de volgende uitwerking voor de verhouding van de weerstanden bekomen worden:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{(\rho \ell_2) / (\pi r_2^2)}{(\rho \ell_1) / (\pi r_1^2)} = \left(\frac{\ell_2}{\ell_1}\right) \cdot \left(\frac{r_1^2}{r_2^2}\right) = \left(\frac{\ell}{3\ell}\right)\left(\frac{(3D/2)^2}{(D/2)^2}\right) = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$$

Oefening 10.6.5. Een fietslampje dat bij 6,0 V een vermogen heeft van 9 W wordt aangesloten op een batterij die slechts een spanning levert van 1,5 V. Welk elektrisch vermogen wordt in het lampje ontwikkeld?

$$P = 0.56\ W$$

Uitwerking: Met de vergelijking voor het vermogen van een weerstand kan de grootte van de weerstand bepaald worden met behulp van de gegevens bij een spanning van 6,0 V:

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{(6\ \mathrm{V})^2}{9\ \mathrm{W}} = 4\ \Omega$$

In de veronderstelling dat de grootte van de weerstand onafhankelijk is van de spanning, kan de waarde voor de weerstand dus ook gebruikt worden om het vermogen bij een spanning van 1,5 V te bepalen:

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{(1,5\ \mathrm{V})^2}{4\ \Omega} = 0,56\ \mathrm{W}$$

Oefening 10.6.6. Schat de kostprijs om een lasagne op te warmen in een oven gedurende 20 minuten. De oven werkt op 230 V en de stroom bedraagt 16,0 A. De kostprijs van elektriciteit bedraagt 0,54 euro per kWh.

$$\text{Prijs} = 0.66\ euro$$

Uitwerking: Het vermogen van de oven is gelijk aan :

$$P = U \cdot I = 230\ \mathrm{V} \cdot 16{,}0\ \mathrm{A} = 368 \cdot 10\ \mathrm{W}$$

De omgezette energie is gedurende een tijdsinterval van 20 minuten dan gelijk aan:

$$E = P \cdot \Delta t = 368 \cdot 10\ \mathrm{W} \cdot \frac{20}{60}\ \mathrm{h} = 1{,}23\ \mathrm{kWh}$$

Bijgevolg is de kostprijs:

$$\text{Prijs} = E \cdot \frac{0{,}54\ \text{euro}}{\text{kWh}} = 1{,}23\ \text{kWh} \cdot 0{,}54\ \text{euro} = 0{,}66\ \text{euro}$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.6.C Oefeningen Usolv-it

Oefening 10.6.7. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over elektrodynamica via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

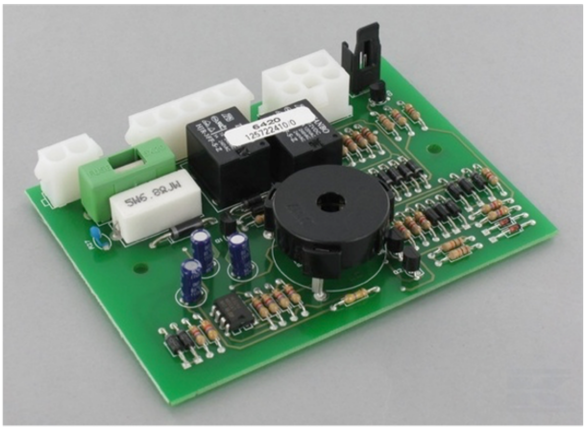
11.1 Intro elektrische schakelingen

In elk elektrisch apparaat is de elektrische schakeling het hart van het toestel. Denk hierbij aan een radio, een telefoon, een televisie, een boormachine, ... In vorige hoofdstukken heb je de basisprincipes van elektriciteit besproken: elektrische stroom, elektrische weerstand, spanning, ... Nu gaan we de verbanden tussen die grootheden bekijken voor een combinatie van verschillende weerstanden en batterijen. We maken daarbij een onderscheid tussen serieschakelingen, parallelschakelingen en gemengde schakelingen.

CC BY-NC-SA 4.0

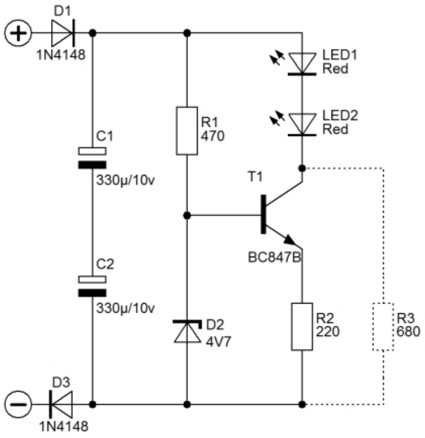
11.2 Begrippen

Elk elektrisch apparaat bevat een printplaat waarop de verschillende elektronische componenten (weerstanden, schakelaars, . . .) op zijn aangesloten. Zo'n schakeling noemen we een elektrische schakeling of netwerk. In zo'n schakeling zijn de componenten met elkaar verbonden via draden of printbanen. De weerstand van die elektrische verbindingen is verwaarloosbaar klein.



Figuur 78 – Voorbeeld van een printplaat.

Onderstaande figuur geeft een schematische weergave van een schakeling. Je herkent misschien het symbool van een weerstand, diode, led, condensator, ...



Figuur 79 – Voorbeeld van een schema van een elektrische schakeling.

Definitie 11.2.1. Een plaats waar drie of meer geleiders samenkomen noemen we een knooppunt.

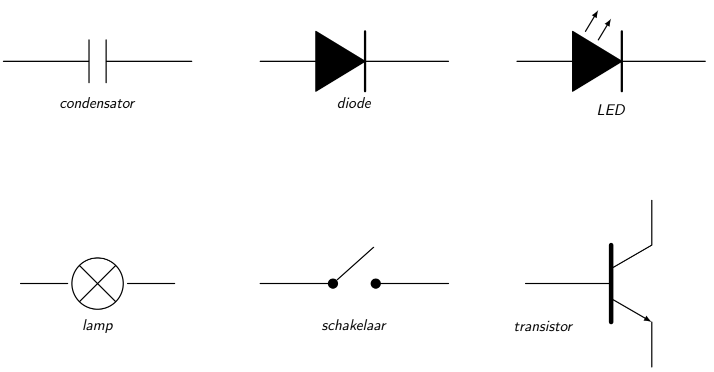
Een deel van een schakeling tussen twee naburige knooppunten is een tak.

Een lus is een gesloten omloop waarbij je vertrekt in een knooppunt en via geleiders en componenten in hetzelfde knoopunt terugkomt.

De verschillende symbolen die in schakelingen worden gebruikt, komen overeen met verschillende elektronische componenten met elk een eigen functie.

CC BY-NC-SA 4.0

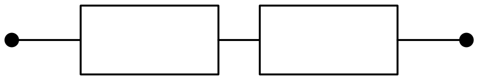
11.2 Begrippen



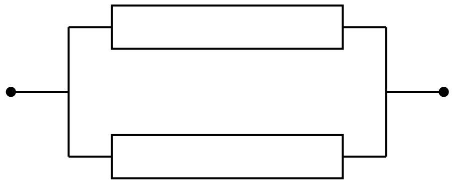
Figuur 80 – Symbolen van veel voorkomende elektronische componenten.

Componenten kunnen in serie of in parallel geschakeld zijn.

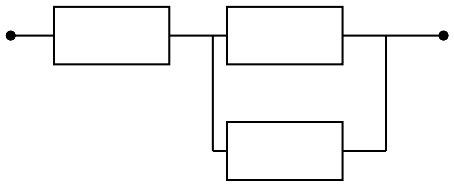
(a) Bij een serieschakeling staan de componenten in één tak achter elkaar.



(b) Bij een parallelschakeling staan de componenten naast elkaar.



Een gemengde schakeling bestaat uit serie- én parallelgeschakelde componenten.



In dit hoofdstuk beperken we ons tot schakelingen van weerstanden.

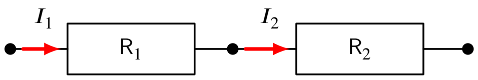
> **Definitie 11.2.2.** De substitutie- of vervangingsweerstand van een schakeling van weerstanden is een weerstand die de schakeling kan vervangen waarbij de totale stroom die door de schakeling zou lopen dezelfde blijft.

CC BY-NC-SA 4.0

11.3 De serieschakeling

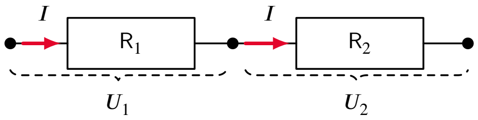
11.3.1 De wetten van de serieschakeling

We bekijken een tak met een serieschakeling van twee weerstanden.



I_1 is de stroom door de eerste weerstand, I_2 is de stroom door de tweede weerstand.

Als je de stromen I_1 en I_2 meet, zie je dat die gelijk zijn.



U is de spanning over de hele serieschakeling, U_1 over de eerste weerstand en U_2 over de tweede. Als je de spanningen U, U_1 en U_2 meet, zie je dat $U = U_1 + U_2$.

Dat geldt ook voor een serieschakeling die bestaat uit meerdere weerstanden.

Eigenschap 11.3.1. (a) De stroom door elke weerstand in een tak is dezelfde:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \ldots$$

(b) De spanning over een tak verdeelt zich over de verschillende weerstanden:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots$$

Verklaring: De eerste wet voor de serieschakeling is een gevolg van het principe van behoud van lading: de lading die door de eerste weerstand stroomt, moet ook door de tweede weerstand stromen, ...

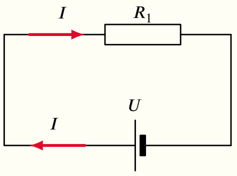
De tweede wet voor de serieschakeling is een gevolg van het principe van behoud van energie.

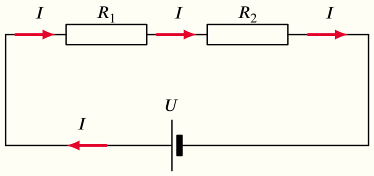
11.3.2 De substitutieweerstand

Eigenschap 11.3.2. De substitutieweerstand R_s van een serieschakeling is gelijk aan de som van de weerstanden:

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$$

Opmerking 11.3.1. Het feit dat in een serieschakeling de stroom door elke weerstand even groot is, betekent niet dat als je een weerstand toevoegt aan een serieschakeling de stroom onveranderd blijft!





CC BY-NC-SA 4.0

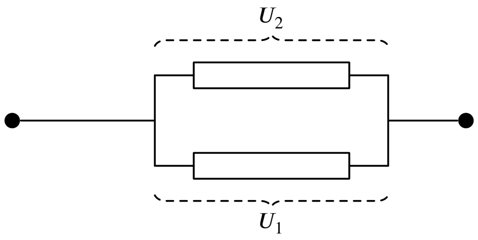
11.3 De serieschakeling

In de schakeling met één weerstand is de totale stroom gelijk aan $I = \dfrac{U}{R_1}$ terwijl in de schakeling met twee weerstanden de stroom gelijk is aan $I = \dfrac{U}{R_1 + R_2}$. Deze stroom is dus kleiner dan in de schakeling met één weerstand!

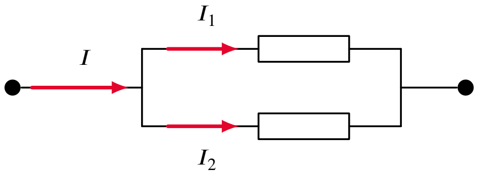
11.4 De parallelschakeling

11.4.1 De wetten van de parallelschakeling

We bekijken een parallelschakeling die bestaat uit twee takken: U_1 is de spanning over de eerste tak, U_2 over de tweede. Als je de spanning U_1 en U_2 meet, zie je dat die gelijk zijn.



I is de stroom voor het knooppunt, I_1 door tak 1 en I_2 door tak 2. Als je de stromen I, I_1 en I_2 meet, zie je dat $I = I_1 + I_2$.



Dat geldt ook voor een parallelschakeling die bestaat uit meerdere takken.

Eigenschap 11.4.1. (a) De spanning over elke tak van de parallelschakeling is dezelfde:

$$U_1 = U_2 = U_3 = \ldots$$

(b) Bij een parallelschakeling verdeelt de stroom zich over de verschillende takken:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots$$

Verklaring: De eerste wet is een gevolg van de wet van behoud van energie.

De tweede wet volgt uit behoud van lading.

11.4.2 De substitutieweerstand

Eigenschap 11.4.2. Voor de substitutieweerstand R_s van een parallelschakeling geldt:

$$\frac{1}{R_S} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots$$

Opmerking 11.4.1. (a) In de praktijk is het werken met de reciproke waarden van de weerstanden niet zo handig. Je kan de formule daarom omvormen. Voor twee weerstanden wordt dit bijvoorbeeld:

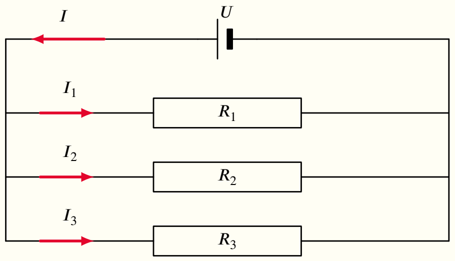
$$\frac{1}{R_S} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{R_S} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2} \quad \Leftrightarrow \quad R_S = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 + R_1}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

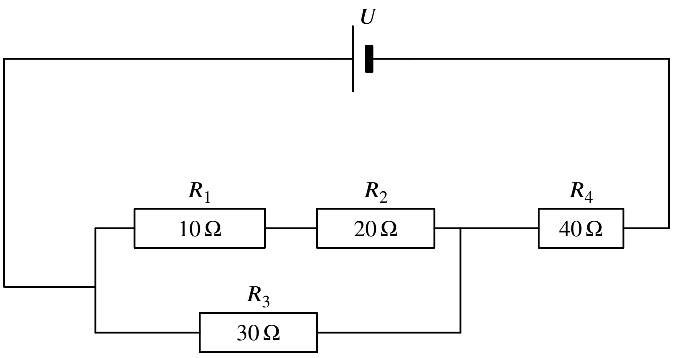
11.4 De parallelschakeling

(b) Elke keer je een weerstand aan een parallelschakeling toevoegt, verlaag je de totale weerstand en vergroot je de stroom in de kring.

$$R_s = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_1 + I_2 + I_3}.$$



Oefening 11.4.1. Bereken de substitutieweerstand van onderstaande schakeling



Uitwerking: R_1 en R_2 vormen een serieschakeling. De substitutieweerstand daarvan is

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 10\ \Omega + 20\ \Omega = 30\ \Omega.$$

R_{12} en R_3 vormen een parallelschakeling. De substitutieweerstand daarvan is:

$$R_{123} = \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_{12} + R_3} = \frac{30\ \Omega \cdot 30\ \Omega}{30\ \Omega + 30\ \Omega} = 15\ \Omega.$$

Merk op dat de substitutieweerstand van een parallelschakeling van twee weerstanden van 30 Ω gelijk is aan 15 Ω (precies de helft!).

R_{234} en R_1 vormen een serieschakeling. De substitutieweerstand daarvan is

$$R_{123} + R_4 = 15\ \Omega + 40\ \Omega = 55\ \Omega.$$

Dit is de substitutieweerstand van de hele schakeling: $R_s = 55\ \Omega$.

CC BY-NC-SA 4.0

11.5 Oefeningen Schakelingen

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

A) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

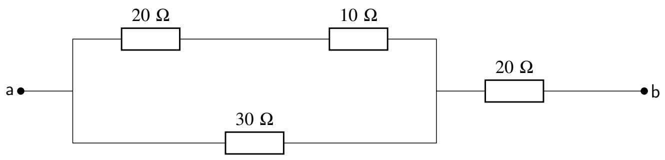
B) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

C) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

11.5.A Instapoefeningen

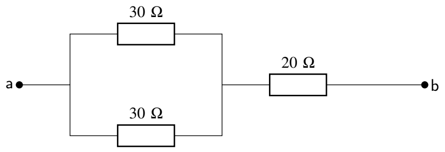
Oefening 11.5.1. Zoek de vervangingsweerstand van de schakeling tussen a en b.



$$R_s = 35\ \Omega$$

Uitwerking: De twee weerstanden in de bovenste tak van de parallelschakeling zijn in serie geschakeld en kunnen dus gewoon opgeteld worden:

$$R_{12} = 20\ \Omega + 10\ \Omega = 30\ \Omega.$$



Deze weerstand staat parallel geschakeld met een derde weerstand $R_3 = 30\ \Omega$ en deze twee takken zijn equivalent met een weerstand R_{123} gegeven door

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{30\ \Omega} + \frac{1}{30\ \Omega} = \frac{2}{30\ \Omega} \Rightarrow R_{123} = \frac{30\ \Omega}{2} = 15\ \Omega$$

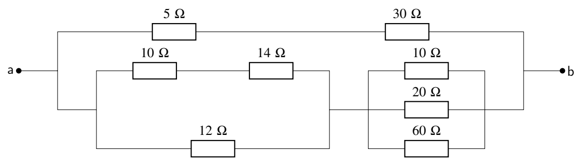
De laatste weerstand staat in serie geschakeld met de substitutieweerstand R_{123}. Dit kan dan finaal vervangen worden door een laatste substitutieweerstand R_{1234} gegeven door

$$R_{1234} = R_{123} + R_4 = 15\ \Omega + 20\ \Omega = 35\ \Omega.$$

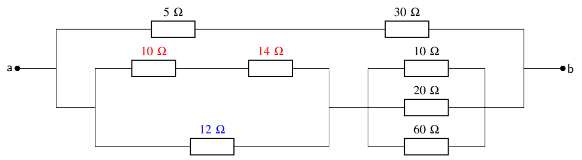
CC BY-NC-SA 4.0

11.5.B Standaardoefeningen

Oefening 11.5.2. Zoek de vervangingsweerstand van de schakeling tussen a en b.



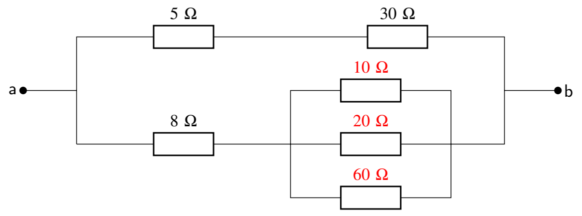
$$R_s = 10\ \Omega$$



Uitwerking:

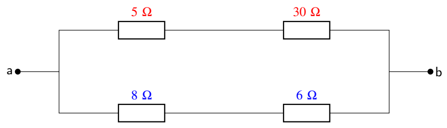
In de eerste stap nemen we de rode weerstanden van 10 Ω en 14 Ω die in serie geschakeld staan samen door ze op te tellen. Daarna kan deze substitutieweerstand van $R_{12} = 24\ \Omega$ samengenomen worden met de blauwe weerstand die in parallel geschakeld is. Zo kan substitutieweerstand R_{123} op de volgende manier bekomen worden:

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{12\ \Omega} + \frac{1}{24\ \Omega} = \frac{(2+1)}{24\ \Omega} = \frac{3}{24\ \Omega} \Rightarrow R_{123} = 8\ \Omega$$



In de tweede stap nemen we de rode weerstanden van 10 Ω, 20 Ω, en 60 Ω samen. Met dezelfde redenering als in stap één bekomen we dan:

$$\frac{1}{R_{456}} = \frac{1}{10\ \Omega} + \frac{1}{20\ \Omega} + \frac{1}{60\ \Omega} = \frac{(6+3+1)}{60\ \Omega} = \frac{10}{60\ \Omega} \Rightarrow R_{456} = 6\ \Omega$$

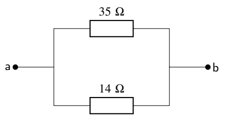


In de derde stap nemen we de twee eerder bekomen substitutieweerstanden R_{123} en R_{456} (blauwe labels) samen.

$$R_{123456} = R_{123} + R_{456} = 8\ \Omega + 6\ \Omega = 14\ \Omega$$

Op analoge wijze kunnen we de in serie geschakelde weerstanden in de rechter tak (rode labels) samen nemen:

$$R_{78} = 30\ \Omega + 5\ \Omega = 35\ \Omega$$



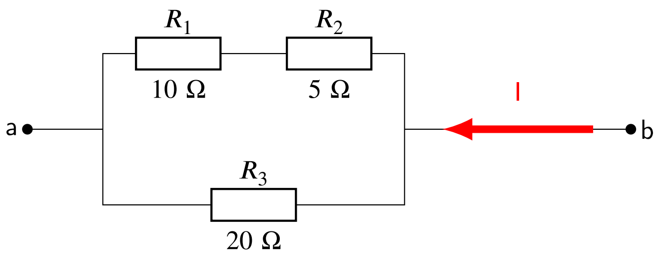
CC BY-NC-SA 4.0

11.5.B Standaardoefeningen

In de laaste stap kunnen we de twee overgebleven parallel geschakelde weerstanden samen nemen in een substitutieweerstand R_s, waarvan de grootte bepaald wordt door:

$$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{14\ \Omega} + \frac{1}{35\ \Omega} = \frac{(5+2)}{70\ \Omega} = \frac{7}{70\ \Omega} \Rightarrow R_s = \frac{70\ \Omega}{7} = 10\ \Omega$$

Oefening 11.5.3. De weerstand van 10 Ω ontwikkelt een vermogen van 40 W. Hoe groot is het vermogen van de andere twee weerstanden?



1. $P_2 = 20\ W$
2. $P_3 = 45\ W$

Uitwerking: Met de vergelijking voor vermogen kunnen we de stroom bepalen die door weerstand R_1 gaat:

$$P_1 = I_1^2 R_1 = 40\ \mathrm{W} \Rightarrow I_1 = \sqrt{\frac{P_1}{R_1}} = \sqrt{\frac{40\ \mathrm{W}}{10\ \Omega}} = 2{,}0\ \mathrm{A}.$$

Vermits weerstand R_2 in serie geschakeld is met R_1, gaat er dezelfde hoeveelheid stroom door. Het vermogen dat door R_2 ontwikkeld wordt, wordt dus gegeven door

$$P_2 = I^2 R_2 = (2{,}0\ \mathrm{A})^2\,(5\ \Omega) = 20\ \mathrm{W}.$$

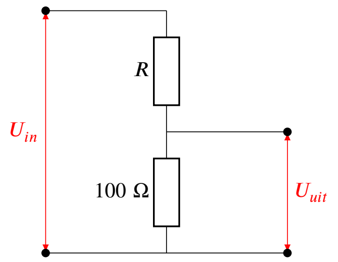
Het potentiaalverschil over de twee in serie geschakelde weerstanden is gelijk aan het potentiaalverschil over de derde weerstand, waardoor we dus kunnen bepalen dat het vermogen ontwikkeld in weerstand R_3 bepaald wordt door

$$P_3 = \frac{U_3^2}{R_3} = \frac{(U_2+U_1)^2}{R_3} = \frac{(I_1R_2+I_1R_1)^2}{R_3} = \frac{(2{,}0\ \mathrm{A})^2\,(5\ \Omega+10\ \Omega)^2}{20\ \Omega} = 45\ \mathrm{W}$$

CC BY-NC-SA 4.0

11.5.C Gevorderde oefeningen

Oefening 11.5.4. Hoe groot moet weerstand R zijn opdat $U_{\text{uit}} = \frac{1}{10} \cdot U_{\text{in}}$?



$$R = 900\ \Omega$$

Uitwerking: De twee weerstanden zijn in serie geschakeld. De stroom door elke weerstand is dezelfde en noemen we I. De substitutieweerstand van een serieschakeling is gelijk aan de som van de weerstanden. Uit de wet van Ohm volgt dan dat:

$$U_{in} = (R + 100\ \Omega)I \Rightarrow I = \frac{U_{in}}{R + 100\ \Omega} \quad (1)$$

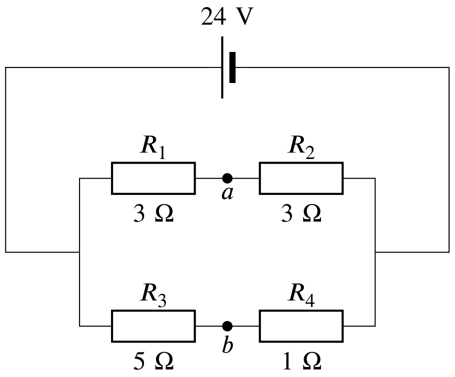
De uitgaande spanning is door de wet van Ohm en na invullen van (1) gelijk aan :

$$U_{uit} = I(100\ \Omega) \Rightarrow U_{uit} = \frac{U_{in}}{R + 100\ \Omega}(100\ \Omega) \Rightarrow \frac{U_{uit}}{U_{in}} = \frac{100\ \Omega}{R + 100\ \Omega}$$

Uit de voorwaarde $U_{uit} = U_{in}/10$ vereenvoudigt de vergelijking tot

$$\frac{U_{in}/10}{U_{in}} = \frac{100\ \Omega}{R + 100\ \Omega} \Rightarrow R + 100\ \Omega = 1000\ \Omega \Rightarrow R = 900\ \Omega$$

Oefening 11.5.5. Hoe groot is de spanning tussen a en b?



$$U = 8\ V$$

11.5.C Gevorderde oefeningen

Uitwerking: Om de spanning in beide takken te bepalen, moet de stroom in de kring eerst bepaald worden. Hiertoe moet de substitutieweerstand van de vier getoonde weerstanden bepaald worden. Voor elke tak zijn de weerstanden in serie geschakeld, en kunnen de weerstanden opgeteld worden om de equivalente weerstand te vinden:

$$R_a = R_1 + R_2 = 3\ \Omega + 3\ \Omega = 6\ \Omega \quad \text{en} \quad R_b = R_3 + R_4 = 5\ \Omega + 1\ \Omega = 6\ \Omega$$

Deze twee substitutieweerstanden staan parallel geschakeld en kunnen vervangen worden door een equivalente weerstand met een weerstand gegeven door

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} = \frac{1}{6\ \Omega} + \frac{1}{6\ \Omega} = \frac{2}{6\ \Omega} = \frac{1}{3\ \Omega} \Rightarrow R_{tot} = 3\ \Omega$$

Vermits de batterij met een emk van 24 V verbonden is met een equivalente weerstand van 3 Ω, kan de stroom die door de batterij gaat, bepaald worden als

$$R_{tot} = \frac{U}{I} \Rightarrow I = \frac{U}{R_{tot}} = \frac{24\ \text{V}}{3\ \Omega} = 8\ \text{A}$$

De stroom die door elke tak gaat, kan bepaald worden als volgt:

$$\epsilon = I_a R_a \Rightarrow I_a = \frac{\epsilon}{R_a} = \frac{24\ \text{V}}{6\ \Omega} = 4\ \text{A} \quad \text{en} \quad \epsilon = I_b R_b \Rightarrow I_b = \frac{\epsilon}{R_b} = \frac{24\ \text{V}}{6\ \Omega} = 4\ \text{A}$$

Merk op dat nu geldt dat de potentiaal in punt a en b gelijk is aan

$$V_a = 24\ \text{V} - I_a(3\ \Omega) = 12\ \text{V} \quad \text{en} \quad V_b = 24\ \text{V} - I_b(5\ \Omega) = 4\ \text{V}$$

Door deze twee waarden van elkaar af te trekken, bekomen we het potentiaalverschil U_{ab} tussen punt a en b

$$U_b - U_a = 12\ \text{V} - 4\ \text{V} = +8\ \text{V}$$

CC BY-NC-SA 4.0

11.5.D Oefeningen Usolv-it

Oefening 11.5.6. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over schakelingen via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

12.1 Intro permanente magneten

Hoewel in de oudheid de magnetische eigenschappen van sommige gesteenten (vb. magnetiet) al bekend waren, heeft het tot de negentiende eeuw geduurd vooraleer men de werkelijke oorzaak van magnetisme heeft kunnen bepalen. Men zag immers bij de studie van elektrische stromen dingen gebeuren die erg op de effecten van magneten lijken. In heel wat elektrische apparaten spelen magneten een belangrijke rol. Denk bijvoorbeeld aan de kleine luidsprekers die vandaag veel gebruikt worden. Ook in elke motor vind je een magneet terug. In dit hoofdstuk onderzoeken we de eigenschappen van magneten en leggen we een verband met de vorige hoofdstukken over elektrische stromen.

CC BY-NC-SA 4.0

12.2 Eigenschappen

12.2.1 Natuurlijke en kunstmatige magneten

In de natuur komen ertsen voor die ijzer aantrekken: magnetiet is een **natuurlijke magneet**. Ook de Aarde zelf is, door de aanwezigheid van dergelijke materialen, in feite één grote magneet.

Sinds het einde van de 19de eeuw kunnen we ook **kunstmatige magneten** maken. Hiervoor gebruikt men een legering van ijzer en andere stoffen. Zo zijn bijvoorbeeld AlNiCo-magneten opgebouwd uit Fe, Al, Ni en Co. De sterkste magneten die men tegenwoordig maakt, zijn de neodymiummagneten (Nd, Fe en B).

12.2.2 Magnetiseren van magnetiseerbare stoffen

Als een stof magnetiseerbaar is, zoals ijzer, staal, ... dan worden ze magnetisch door ze in de buurt te houden van een magneet (dit kan vb ook gewoon de Aarde zijn). Dit proces noemen we magnetiseren.

Echter, sommige van deze stoffen verliezen hun magnetisatie onmiddellijk als ze van bij die magneet worden weggehaald. We noemen deze stoffen **zachte** magnetische materialen. Andere stoffen blijven hun magnetisatie daarna wel behouden. Deze stoffen noemen we **harde** magnetische materialen. Als de zo verkregen magnetisatie een heel lange tijd aanhoudt, noemen we deze stoffen **permanente magneten**.

12.2.3 Eigenschappen van permanente magneten

Permanente magneten hebben volgende eigenschappen:

(a) een magneet oefent een aantrekkingskracht uit op bepaalde materialen zoals ijzer, kobalt en nikkel.

(b) een magneet heeft steeds twee polen: een noordpool (N) en een zuidpool (Z). Een noordpool en een zuidpool trekken elkaar aan. Twee gelijknamige polen stoten mekaar af.

(c) als je een magneet in twee stukken breekt, heeft elk stuk een noord- en een zuidpool. Je krijgt zo dus twee magneten uit één.

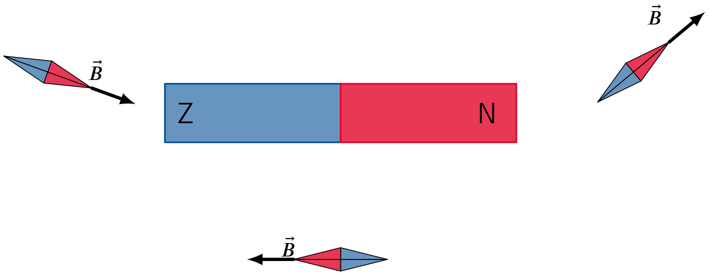
CC BY-NC-SA 4.0

12.3 Het magnetische veld

12.3.1 Definitie van het magnetische veld

Een magneet verandert de eigenschappen van de ruimte errond. De magneet creëert rond zich een **magnetisch veld**, dat op grotere afstand steeds zwakker wordt tot het verdwijnt.

Om de invloed van een magneet in een punt P, gelegen in zijn magnetisch veld, weer te geven, gebruiken we de grootheid $\vec{B}$. Met een kompasnaald kan je informatie bekomen over $\vec{B}$: in de buurt van een magneet geeft de kompasnaald de richting en zin aan van het magnetische veld: de noordpool van de kompasnaald wijst in de richting en zin van het magnetische veld op die plaats.



Figuur 81 – Een kompasnaald, meer bepaald zijn noordpool, geeft op een bepaalde plaats de richting en zin van het magnetische veld.

Definitie 12.3.1. Het magnetische veld $\vec{B}$ in een punt P, gelegen in het magnetisch veld van een magneet, is een vector met volgende kenmerken:

(a) het aangrijpingspunt is het punt P;

(b) de richting is die van een kompasnaald in dat punt;

(c) de zin is die waarin de **N-pool** van de kompasnaald wijst;

(d) de grootte geeft de sterkte van het magnetische veld aan in dat punt.

De grootte van het magnetische veld wordt uitgedrukt in tesla (T).

12.3.2 Samenstellen van magnetische veldvectoren

Ligt een punt P in de buurt van meer dan één magneet, dan krijgt het van elke magneet apart een eigen veldvector, waarna de eigenlijke veldvector in punt P gevonden kan worden als de samenstelling of dus de **vectorsom**, van de afzonderlijke veldvectoren.

12.3.3 Magnetische veldlijnen

Je kunt een magnetisch veld voorstellen door veldvectoren in allerlei punten van het veld te tekenen, maar meestal gebruikt men echter magnetische **veldlijnen** om in een oogopslag een beeld te vormen van het magnetische veld. Zo krijg je dus snel een idee te van hoe (en hoe sterk) een magneetje, zoals bijvoorbeeld een kompasnaaldje, zich zal richten als het op een bepaalde plaats in het veld komt te staan.

Magnetische veldlijnen zijn krommen waar de magnetische veldvectoren op alle plaatsen aan raken. We geven elke veldlijn een pijl die aanduidt in welke richting de veldvectoren, die aan die veldlijn raken, gericht staan. Uit de definitie van de veldvector (zie eerder) volgt onmiddellijk dat de veldlijnen buiten de magneet **van de noordpool naar de zuidpool van de magneet** lopen. Binnenin de magneet sluiten de veldlijnen zichzelf. Ook over de lokale sterkte van het magneetveld krijgen we op deze manier informatie : op plaatsen

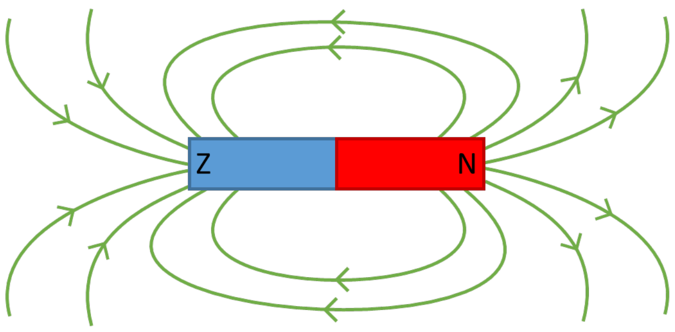
CC BY-NC-SA 4.0

waar de veldlijnen ver uiteen liggen, is er een zwakker magneetveld dan op plaatsen waar ze dicht opeen liggen.

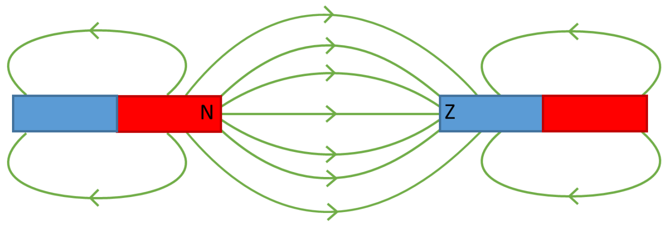
Je kunt het veldlijnenpatroon van een magnetisch veld ook echt zichtbaar maken door ijzervijlselkorreltjes te strooien op een glazen plaat boven de magneet: de korreltjes worden gemagnetiseerd en gedragen zich vervolgens als kleine kompasnaaldjes die zich schikken volgens de veldlijnen.

12.3.4 Enkele magnetische veldlijnenpatronen

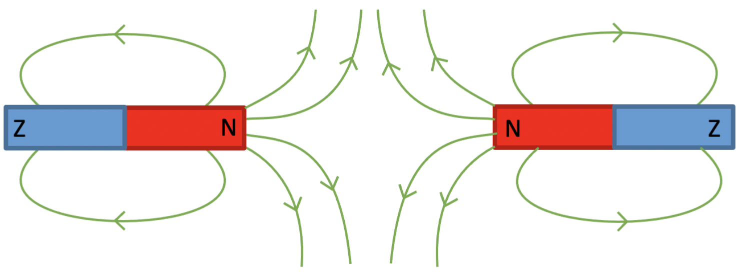
Veld van een staafmagneet



Veld tussen 2 ongelijknamige polen



Veld tussen 2 gelijknamige polen



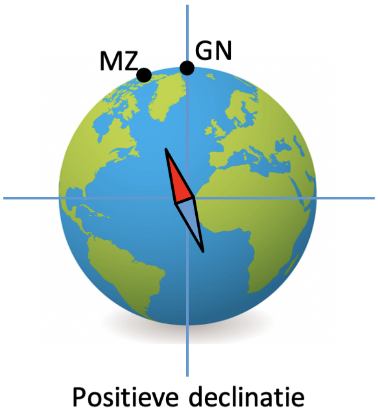
Merk op dat de bovenstaande figuren tweedimensionaal zijn, maar dat in werkelijkheid het veld zich in alle richtingen rond de magneet uitstrekt.

CC BY-NC-SA 4.0

12.4 Het magnetische veld van de aarde

Tegenwoordig gebruikt men steeds meer GPS-systemen om de positie op aarde nauwkeurig te bepalen, maar vroeger gebruikten o.a. de zeevaarders daar een kompas voor.

De aarde is in feite één grote magneet. Bij het werken met een kompas maak je gebruik van het magnetische veld dat zich rond de aarde bevindt. In elk punt op het aardoppervlak kan je de richting en zin van de magnetische veldvector $\vec{B}$ bepalen met behulp van een kompas: een kompasnaald richt zich volgens de magnetische veldvector op die plaats. Dat betekent dat de Noordpool van de kompasnaald naar het magnetische zuiden (MZ) van de aarde wijst.



Figuur 82 – De kompasnaald geeft niet de exacte richting naar het geografische noorden.

Dit magnetische zuiden ligt in de buurt van de geografische Noordpool (GN) van de aarde. Daarom zegt men dat een kompas het noorden van de aarde aanwijst.

Echter, door het verschil tussen MZ en GN wijkt een kompasnaald altijd een beetje af. Die afwijking noemt men de **magnetische declinatie** d. De declinatie verschilt van plaats tot plaats op aarde. Aan de evenaar is ze ongeveer 30 microtesla sterk, aan de polen ongeveer het dubbele.

CC BY-NC-SA 4.0

12.5 Oefeningen Magneten

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

A) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

B) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

C) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

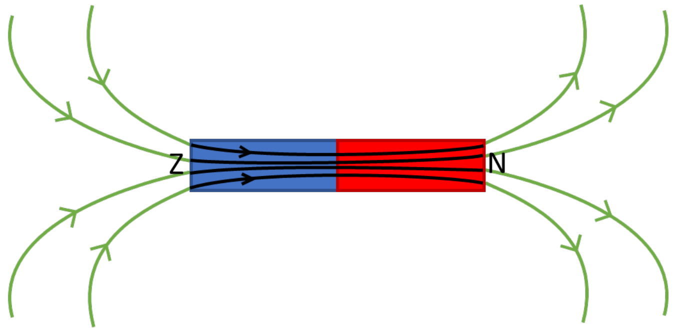
12.5.A Instapoefeningen

Oefening 12.5.1. In een luidspreker zit een magneet die z'n magnetische eigenschappen lang behoudt. Is deze magneet van een hard of een zacht magnetisch materiaal gemaakt?

Uitwerking: Magneten in luidsprekers zijn permanente magneten. Ze zijn van een hard magnetisch materiaal gemaakt, zoals bijvoorbeeld een legering met neodymium.

Oefening 12.5.2. Iemand beweert dat magnetische veldlijnen binnenin een staafmagneet van de noordpool naar de zuidpool lopen. Heeft deze persoon gelijk?

Uitwerking: Deze persoon heeft ongelijk. In de buurt van een staafmagneet lopen de veldlijnen aan de buitenkant van de magneet van de noordpool naar de zuidpool. Omdat veldlijnen zichzelf altijd moeten sluiten, lopen ze in de magneet verder door, waar ze dus van de zuidpool naar de noordpool lopen.



Oefening 12.5.3. De figuur toont twee staafmagneten. Het punt A ligt in het midden tussen twee even sterke polen. Wat kan je zeggen over het magnetisch veld in punt A?

1. **Meerkeuze:**

(a) De veldsterkte is gelijk aan nul.

(b) De magnetische veldvector wijst naar links. ✓

(c) De magnetische veldvector wijst naar rechts.

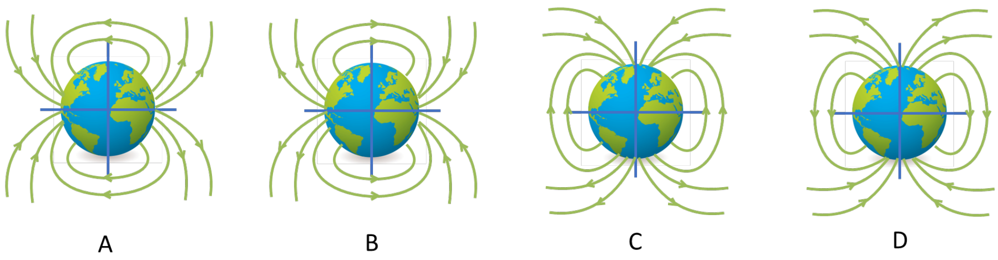
(d) De veldsterkte neemt af als je vanuit A opschuift naar rechts.

Uitwerking: Magnetische veldlijnen lopen buiten de staafmagneet van de noordpool naar de zuidpool. De veldlijn ter hoogte van punt A loopt dus naar links. Dat betekent dat de magnetische veldvector daar ook naar links wijst, omdat die raakt aan de veldlijn.

Oefening 12.5.4. Op welke figuur wordt het magnetisch veldlijnenpatroon van het magnetisch veld van de Aarde best voorgesteld?

CC BY-NC-SA 4.0

12.5.A Instapoefeningen



1. Meerkeuze:

(a) A

(b) B

(c) C ✓

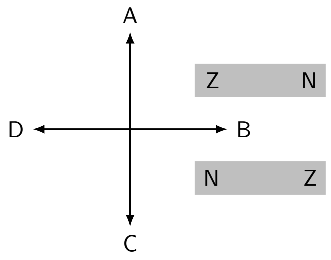
(d) D

Uitwerking: Het magnetisch veld van de Aarde heeft hetzelfde patroon als van een staafmagneet. Omdat veldlijnen van de magnetische noordpool naar de magnetische zuidpool lopen en omdat de magnetische noordpool in de buurt van de geografische zuidpool ligt, is de voorstelling in figuur C de beste keuze.

CC BY-NC-SA 4.0

12.5.B Standaardoefeningen

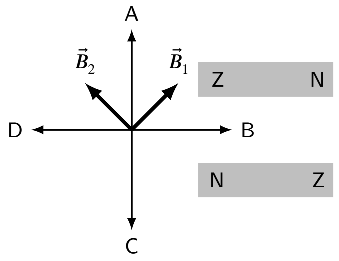
Oefening 12.5.5. De figuur hieronder toont twee staafmagneten met dezelfde grootte en dezelfde sterkte. Welke pijl geeft de richting van het magnetisch veld weer in het punt waar de pijlen vertrekken? (Het punt bevindt zich op gelijke afstanden van de twee magneten)



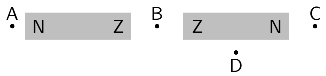
1. **Meerkeuze:**

(a) A ✓
(b) B
(c) C
(d) D

Uitwerking: In het punt waar de pijlen vertrekken is het magnetisch veld veroorzaakt door de bovenste staafmagneet gericht volgens vector $\vec{B}_1$ (beeld je het veldlijnen patroon van deze magneet in). Het magnetisch veld veroorzaakt door de onderste staafmagneet is gericht volgens vector $\vec{B}_2$, en is ze even grootte als $\vec{B}_2$, aangezien beide magneten even sterk zijn en de afstanden tot beide magneten gelijk zijn. Het totale magnetische veld in dit punt is dan de vectorsom van deze twee magnetische velden. Het totale magnetische veld is dus gericht volgens pijl A.



Oefening 12.5.6. De figuur toont twee staafmagneten met dezelfde grootte en dezelfde sterkte. In welk van de aangeduide punten (A tot D) is het magnetisch veld het zwakst? (N=Noord en Z=Zuid)



1. **Meerkeuze:**

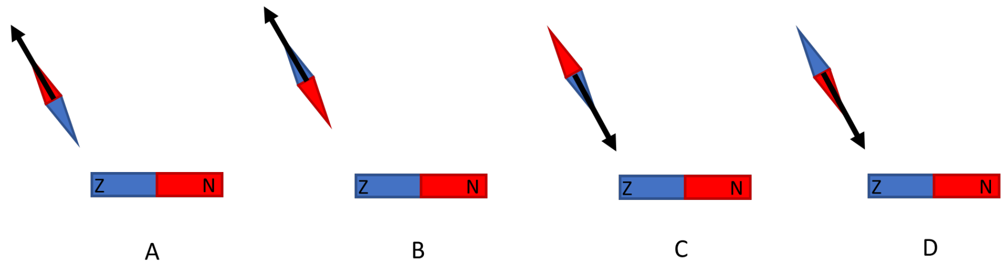
(a) A
(b) B ✓
(c) C
(d) D

Uitwerking: De magnetische veldvector in de buurt van een staafmagneet wijst van de noordpool weg en naar de zuidpool toe. In punt B wijst het magnetisch veld veroorzaakt door de linkse magneet dus naar rechts, en het magnetisch veld veroorzaakt door de rechtse magneet naar links. De som van deze twee velden is nul. In punt B is de veldsterkte dus het kleinst.

CC BY-NC-SA 4.0

12.5.B Standaardoefeningen

Oefening 12.5.7. Op de figuur zie je een staafmagneet met in de buurt een kompasnaald. Op de kompasnaald is de magnetische veldvector weergegeven. Welke figuur zou juist kunnen zijn?



1. **Meerkeuze:**

(a) A

(b) B

(c) C

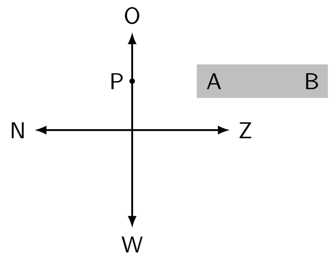
(d) D ✓

Uitwerking: Het noordpool van de magneetnaald zal wijzen naar de zuidpool van de staafmagneet omdat een zuidpool een noordpool aantrekt. De magnetische veldvector wijst naar de zuidpool toe. Daarom is enkel figuur D mogelijk.

CC BY-NC-SA 4.0

12.5.C Gevorderde oefeningen

Oefening 12.5.8. Een zwakke staafmagneet ligt op een tafel. De windroos geeft de windrichtingen aan. In punt P plaats je nu een kompasnaaldje om het veld op die plaats te testen, maar het naaldje geeft geen duidelijke richting aan. Aan welke kant zal de noordpool van de magneet zich dan bevinden, kant A of kant B?



Uitwerking: Het feit dat het kompasnaaldje geen duidelijke richting aangeeft kan erop wijzen dat de vectoriële som van het aardmagnetisch veld en het veld van de staafmagneet nul is. Vermits de windroos aangeeft dat de noordelijke richting naar links wijst, wijst de veldvector van het aardmagnetisch veld naar links en zal de veldvector van de magneet naar rechts moeten wijzen. Punt A zou dus een zuidpool kunnen aangeven en punt B een noordpool.

CC BY-NC-SA 4.0

13.1 Intro magnetisch veld van een elektrische stroom

In 1820 ontdekte de Deen Hans Christian Oersted dat een elektrische stroom een magnetisch veld rond zich creëert. Zijn experimenten wezen op een verband tussen elektriciteit en magnetisme.

CC BY-NC-SA 4.0

13.2 Het magnetische veld van een rechte stroomvoerende geleider

Grootheden zoals snelheid, kracht en ook magnetisch veld zijn vectoriële grootheden. We stellen ze voor door een pijl. Ook de conventionele stroom stellen we vaak voor door een pijl, hoewel een stroom geen vectoriële grootheid is. Op een figuur gebruiken we de volgende afspraken:

(a) Een pijl die uit het blad komt, stellen we voor als:

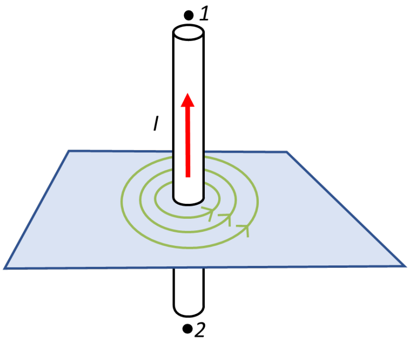
$$\odot$$

(b) Een pijl die in het blad gaat, stellen we voor als:

$$\otimes$$

Je kan als geheugensteuntje denken aan een dartspijltje: vliegt dat naar je toe, dan zie je een puntje, vliegt dat van je weg, dan zie je een kruisje.

Oersted ontdekte in 1820 volgend magnetisch effect van elektricteit : Stuur je door een rechte draad een elektrische stroom, en plaats je in de buurt ervan enkele kompasnaalden, dan blijken deze kompasnaalden zich te richten. Er is blijkbaar een magnetisch veld aanwezig rond een elektrische stroom, en de gerichte kompasnaaldjes geven je een zicht op dit magnetische veld.



Figuur 83 – Magnetische veldlijnen rond een rechte geleider zijn cirkelvormig.

Bekijk je het veldlijnenpatroon vanuit de aangeduide punten 1 en 2, dan bekom je de volgende figuren:

CC BY-NC-SA 4.0

13.2 Het magnetische veld van een rechte stroomvoerende geleider

(a) (b)

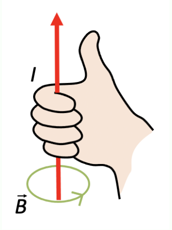
Figuur 84 – Veldlijnenpatroon rond een stroomvoerende geleider die (a) uit het blad of (b) in het blad gericht is.

Eigenschap 13.2.1. Voor het magnetisch veld van een rechte stroomvoerende geleider vind je volgende eigenschappen:

(a) De magnetische veldlijnen van een rechte stroomvoerende geleider zijn concentrische cirkels met de draad als middelpunt en gelegen in vlakken loodrecht op de draad.

(b) De magnetische veldlijnen liggen dichter bijeen naarmate ze dichter bij de draad liggen.

(c) De zin van de veldlijnen (wijzerzin of tegenwijzerzin) kun je onthouden met **de eerste regel van de rechterhand**: omknel je de geleider met je rechterhand zodat je duim in de conventionele stroomzin wijst, dan geeft de kromming van je vingers de zin van de veldlijnen aan.



De grootte van het magnetische veld $\vec{B}$ in een punt P op een afstand r van een draad met stroom I is

$$B = \mu \cdot \frac{I}{2\pi \cdot r}.$$

Hoe groter I, hoe groter B in een bepaald punt. Een grotere stroom wekt dus een groter magneetveld op. Hoe groter r, of dus hoe verder punt P van de draad ligt, hoe kleiner B. Dit is de aanleiding om de veldlijnen dichter bijeen te tekenen dichterbij de draad, en verder uiteen ver weg van de draad.

De constante μ is de permeabiliteit van de zogenaamde 'middenstof', dit is de stof die zich rond de draad bevindt. Hoe groter μ, hoe sterker het magnetische veld.

De permeabiliteit voor vacuüm stelt men voor door μ_0 en is gelijk aan

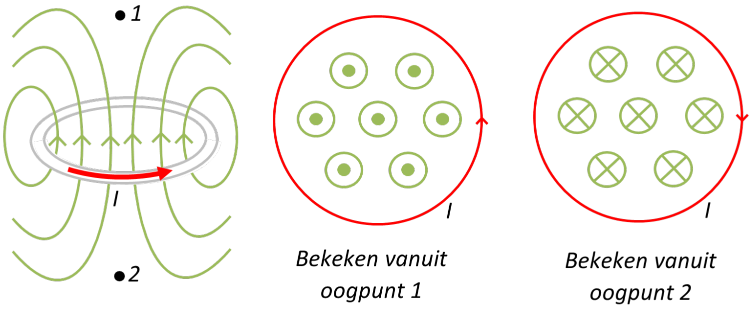
$$\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{Tm}{A}.$$

De waarde voor lucht verschilt hier maar heel weinig van. Daarom neemt men voor lucht vaak gewoon dezelfde waarde.

CC BY-NC-SA 4.0

13.3 Het magnetische veld van één stroomvoerende winding

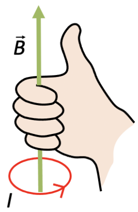
Als je met een geleider een lus vormt of hem éénmaal rond een cilinder wikkelt, spreken we van een winding. Experimenteel vind je dat een stroomvoerende winding een magnetisch veld creëert zoals in onderstaande figuur.



Figuur 85 – Veldlijnenpatroon rond een stroomvoerende winding.

Het magneetveld is buiten de winding zwakker dan binnen de winding. Met andere woorden : de veldlijnen liggen buiten de winding verder uiteen dan binnen de winding. Daarom wordt het magneetveld buiten de winding vaak verwaarloosd. De magnetische veldlijnen van een stroomvoerende winding bevinden zich dus binnen de winding en staan loodrecht op de winding.

De zin van de veldlijnen kun je onthouden met de **tweede regel van de rechterhand**: krom je de vingers van je rechterhand volgens de stroomzin, dan wijst je duim in de zin van de veldlijnen.



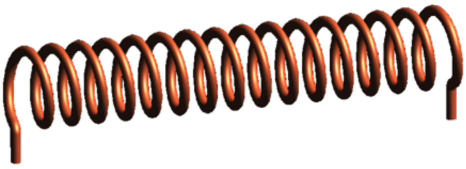
Eigenschap 13.3.1. De grootte van het magnetische veld $\vec{B}$ in het middelpunt van één winding met straal r en stroom I is

$$B = \mu \cdot \frac{I}{2r}.$$

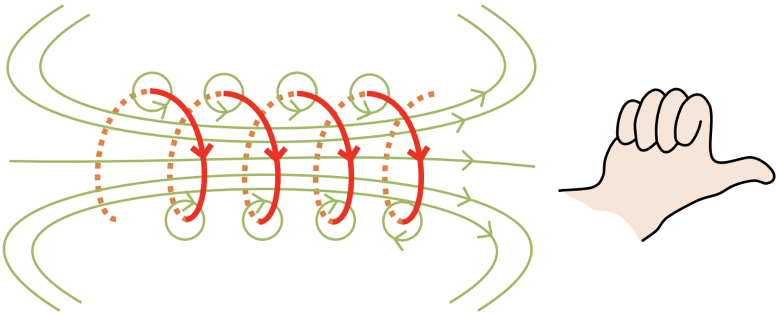
CC BY-NC-SA 4.0

13.4 Het magnetische veld van een stroomvoerende spoel

Als je een geleider een aantal keer rond een cilinder of balk wikkelt, bekom je een spoel, ook wel solenoïde genoemd.



Experimenteel blijkt dat een stroomvoerende spoel een magnetisch veld creëert zoals in onderstaande figuur. In de spoel zijn de veldlijnen nagenoeg evenwijdig en liggen volgens de lengterichting van de spoel. Het veld in de spoel is dus homogeen. Dat komt omdat elke winding een elementair magnetisch veld vormt loodrecht op die winding: alle windingen samen geven het magnetische veld van de spoel.



Figuur 86 – Veldlijnenpatroon in en rond een stroomvoerende spoel.

Buiten de spoel wordt is het magnetisch veld zwak en wordt het dus vaak verwaarloosd. Binnenin een stroomvoerende spoel is het magnetische veld homogeen. De zin van de veldlijnen kun je ook hier vinden met de tweede regel van de rechterhand.

Eigenschap 13.4.1. De grootte B van het magnetische veld hangt af van de stroomsterkte I, het aantal windingen N en de lengte ℓ waarover de koperdraad gewikkeld is. Experimenteel blijkt dat de grootte van het veld in het centrum van de spoel gegeven wordt door:

$$B = \mu \cdot \frac{I \cdot N}{\ell}.$$

Hoe groter de stroom I, hoe groter het magnetisch veld in de spoel.

$\frac{N}{\ell}$ is het aantal windingen per lengte-eenheid van de spoel, ook wel de windingdichtheid van de spoel genoemd. Hoe groter $\frac{N}{\ell}$, hoe groter B.

Hoe groter μ, hoe groter B. Is de ruimte binnen de spoel vacuüm gemaakt, of is er lucht, dan gebruiken we hiervoor de waarde μ_0. Voor ijzer is μ echter veel groter dan voor lucht. Dus door een ijzeren kern in een spoel te schuiven, wordt het magnetisch veld van een spoel veel sterker.

Oefening 13.4.1. Een $1,0$ m lange MRI-spoel wekt een magnetisch veld op van $1,2$ T. Om zo een groot veld te kunnen opwekken is de spoel gemaakt van een supergeleidend materiaal waardoor een stroom van 100 A kan vloeien. Hoeveel windingen zijn er nodig om dit veld op te wekken?

CC BY-NC-SA 4.0

13.4 Het magnetische veld van een stroomvoerende spoel

Uitwerking: Uit de formule voor het magnetische veld in het midden van de spoel

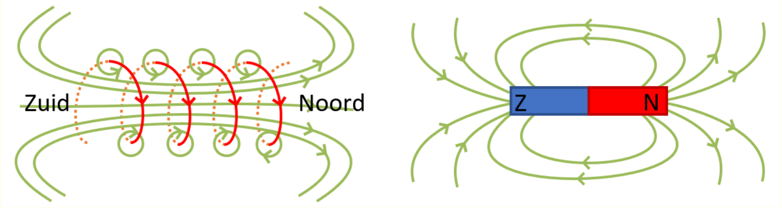
$$B = \mu \cdot \frac{I \cdot N}{\ell}$$

volgt dat

$$N = \frac{\ell \cdot B}{\mu \cdot I} = \frac{1,0\ m \cdot 1,2\ T}{1,257 \cdot 10^{-6}\frac{Tm}{A} \cdot 100\ A} = 95 \cdot 10^2$$

Besluit Er zijn $95 \cdot 10^2$ windingen nodig om een veld van $1,2$ T op te wekken.

Opmerking 13.4.1. Het veldlijnenpatroon dat een spoel opwekt, lijkt heel erg op het veldlijnenpatroon van een staafmagneet. Hoewel de spoel elektrische stroom voert, gedraagt ze zich magnetisch. Er ontstaat aan elke kant van de spoel een noordpool of een zuidpool, de spoel is in zekere zin een staafmagneet geworden. Men noemt een stroomvoerende spoel ook wel een **elektromagneet**.



Dat elektriciteit magnetisme kan opwekken is zeer bijzonder. Het was reeds aanwezig bij de rechte geleider en de winding, maar het effect wordt pas heel sterk bij een spoel met grote windingsdichtheid. Elektriciteit en magnetisme zijn zeer nauw verwant, want ook het omgekeerde effect zal bestaan : magnetisme zal elektriciteit kunnen opwekken. We noemen elektriciteit en magnetisme daarom samen **elektromagnetisme**.

CC BY-NC-SA 4.0

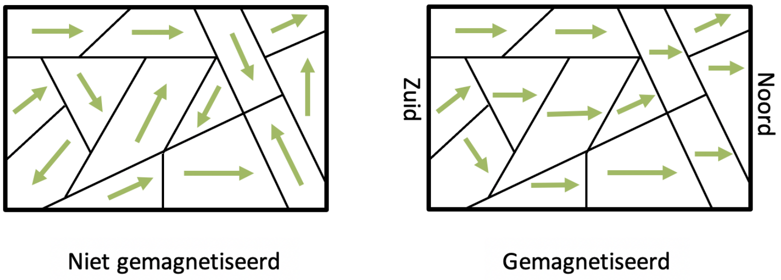
13.5 Verklaring van magnetisme

13.5.1 Ferromagnetische materialen

Een elektrische stroom is een verschuiving van ladingen en creëert rond zich een magnetisch veld. Men neemt aan dat ook bij permanente magneten het magnetisme veroorzaakt wordt door bewegende ladingen. Doordat in elk atoom elektronen rond de kern bewegen, zorgt dat voor ontelbaar veel kleine stroompjes met een bijhorend magnetisch veldje. Bovendien heeft elk elektron een elektronspin, die ook bijdraagt tot de magnetische eigenschappen van het materiaal.

De beweging van de elektronen rond de kern en de elektronenspins zorgen voor een magnetisch veldje bij elk atoom. Voor de meeste soorten atomen is het netto-magnetisch veldje van elk atoom echter praktisch nul. Deze materialen zijn niet magnetiseerbaar. Bij andere atoomsoorten is het netto magnetisch veld van elk atoom echter niet-nul, en is het materiaal dus wel magnetiseerbaar.

Slechts bij enkele van al deze magnetiseerbare materialen, **ferromagnetische materialen** genaamd (zoals bv. ijzer), vormen zich spontaan gebiedjes van $0,01$ à $0,1$ mm breed, **gebieden van Weiss** of magneculen genoemd, waarin de veldjes van de atomen zich telkens collectief gelijkrichten. Deze gebiedjes zijn vrij goed bestand tegen het stoppen van het magnetisatieproces, en blijven dus achteraf lange tijd bestaan. Dit fenomeen vormt de verklaring voor het ferromagnetisme in deze materialen. De bekendste ferromagneten zijn ijzer en nikkel.



Figuur 87 – Gebieden van Weiss in een ferromagnetisch materiaal.

In een nog niet (of niet meer) gemagnetiseerd stuk ijzer zijn de gebieden van Weiss willekeurig geordend, zodat er praktisch geen netto-magnetisch veld is (zie figuur links). Als je een magneet nabij brengt oriënteren die gebieden van Weiss zich meer in één bepaalde richting: het stuk ijzer wordt magnetisch. Het stuk ijzer krijgt dus een noordpool en een zuidpool. Bij een hard magnetisch materiaal blijven de gebieden van Weiss hun oriëntatie behouden nadat de magneet verwijderd is, bij zacht magnetisch materiaal verdwijnt dan die oriëntatie.

Door een gemagnetiseerd materiaal sterk op te warmen (boven de zogenaamde **Curie-temperatuur**) verstoor je de gebieden van Weiss totdat ze verdwijnen. Het ijzer is dan niet langer ferromagnetisch.

CC BY-NC-SA 4.0

13.6 Oefeningen Magnetisch veld

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

A) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

B) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

C) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

13.6.A Instapoefeningen

Oefening 13.6.1. Hoewel wetenschappers het er niet over eens zijn, houdt men de laatste jaren rekening met het feit dat hoogspanningslijnen misschien een negatief effect hebben op de gezondheid. Een typische hoogspanningslijn loopt 20 m boven de grond en vervoert een stroom van 200 A. Hoe groot is het magnetische veld op een plaats recht onder de hoogspanningslijn als gevolg van de stroom door deze hoogspanningslijn?

$$B = 2.0\ \mu T$$

Uitwerking: Hier kan de vergelijking voor het magnetisch veld opgewekt door een rechte stroomvoerende geleider gebruikt worden:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{(2 \cdot 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A})(200\ \text{A})}{20\ \text{m}} = 2.0 \cdot 10^{-6}\text{T} = 2,0\ \mu T$$

Oefening 13.6.2. Een spoel met 1000 windingen heeft een lengte van 6,0 cm. Hoe groot is het magnetisch veld in het midden van de spoel als je er een stroom van 1,5 A door laat lopen?

$$B = 31\ \text{mT}$$

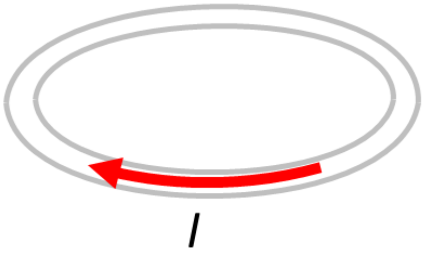
Uitwerking: De formule voor de magnetische veldsterkte in het midden van de spoel is:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell}$$

We vullen de gegevens in en bekomen dan

$$B = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \cdot \frac{1000 \cdot 1,5\ \text{A}}{0,060\,\text{m}} = 0,031\ \text{T}$$

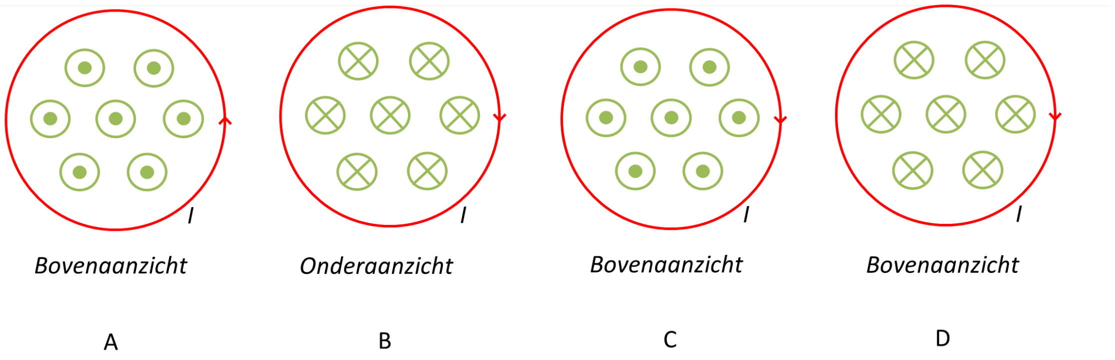
Oefening 13.6.3. Door een cirkelvormige winding loopt een stroom zoals weergegeven op de figuur



Indien je langs boven of langs onder naar de winding kijkt, welke figuur kan dan juist zijn?

CC BY-NC-SA 4.0

13.6.A Instapoefeningen



1. Meerkeuze:

(a) A

(b) B

(c) C

(d) D ✓

Uitwerking: Indien je langs boven naar de lus kijkt loopt de stroom in wijzerzin. De veldlijnen in het midden van de winding lopen dan van je weg, waardoor je ze voorstelt als een kruisje.

Oefening 13.6.4. Iemand beweert dat het patroon van magnetisch veldlijnen rond een stroomvoerende spoel sterk gelijkt op dat van een staafmagneet. Ga je hiermee akkoord? Waarom (niet)?

Uitwerking: Het klopt dat een stroomvoerende spoel zich gedraagt als een staafmagneet. Van zodra er stroom door de spoel vloeit, ontstaat aan één kant van de spoel een noordpool en andere kant een zuidpool. Het veldlijnenpatroon is daardoor vergelijkbaar met dat van een staafmagneet.

CC BY-NC-SA 4.0

13.6.B Standaardoefeningen

Oefening 13.6.5. Een spoel met 1200 windingen heeft een lengte van 8,0 cm. Je wilt er een elektromagneet van maken met een veldsterkte van 1,0 T in het binnenste van de spoel. Hoe groot moet de stroom door de spoel zijn om dat mogelijk te maken?

$$I = 53 \text{ A}$$

Uitwerking: Uit de formule voor de magnetische veldsterkte in het midden van de spoel volgt dat

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\ell \cdot B}{\mu_0 \cdot N}$$

We vullen de gegevens in en bekomen dan

$$I = \frac{0,080 \text{ m} \cdot 1,0 \text{ T}}{1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \cdot 1200} = 53 \text{ A}$$

Oefening 13.6.6. Een enkele lus moet een magnetisch veld creëren van $5,0\ \mu\text{T}$. De maximale stroom die door de draad mag lopen is 4,5 A. Welke diameter moet de lus hebben?

$$breedte = 1.1 \text{ m}$$

Uitwerking: Uit de formule voor de magnetische veldsterkte in het midden van een lus volgt dat

$$B = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot r} \quad \Rightarrow \quad r = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot B}$$

We vullen de gegevens in en bekomen dan

$$r = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \cdot \frac{4,5 \text{ A}}{2 \cdot 5,0 \cdot 10^{-6} \text{T}} = 0,57 \text{ m}$$

De diameter van de lus is dan $2 \cdot 0,57 \text{ m} = 1,1 \text{ m}$

Oefening 13.6.7. Gegeven zijn twee stromen waarvoor geldt dat $I_1 = I_2 = 5,0$ A. Teken de magnetische veldvector in het punt P

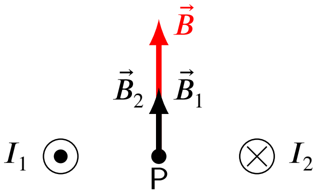
Uitwerking: Elke stroomdraad wekt een magnetisch veld op. Het totale veld is dus de vectoriële som:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

De afstand tot beide stroomdraden is gelijk en er is gegeven dat beide stromen even sterk zijn. Bijgevolg is $B_1 = B_2$. Met behulp van de rechterhandregel vind je dat beide veldvectoren dezelfde richting en zin hebben zodat geldt dat

CC BY-NC-SA 4.0

13.6.B Standaardoefeningen



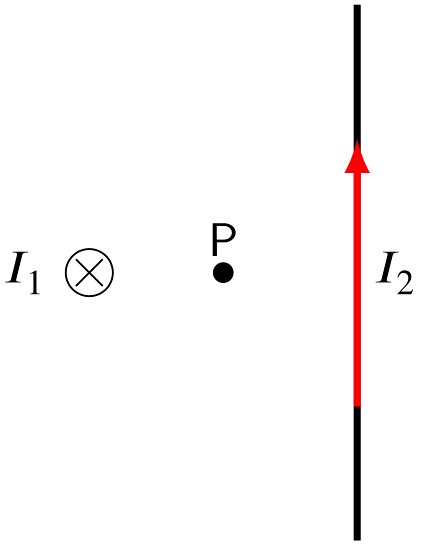
13.6.C Gevorderde oefeningen

Oefening 13.6.8. Een metalen bol hangt op aan een verticaal touw. Als je de noordpool van een magneet dichterbij de bol brengt, wordt de bol sterk aangetrokken door de magneet. Verwijder je nu de noordpool en breng je de zuidpool van de magneet dichterbij de bol, wat verwacht je dat er zal gebeuren?

Uitwerking: De metalen bol is gemaakt van een zacht magnetisch materiaal. In de buurt van de noordpool van de magneet ordenen de gebieden van Weiss in de bol zich zodat aan de kant van de noordpool van de magneet een zuidpool ontstaat in de bol. Daardoor wordt de bol aangetrokken door de magneet. Houd je de zuidpool van de magneet nu in de buurt van de bol, zal de oriëntatie van de gebieden van Weiss in de bol veranderen. Er zal nu een noordpool ontstaan aan de kant van de zuidpool van de magneet. De bol zal dus ook door de zuidpool van de magneet aangetrokken worden.

Oefening 13.6.9. Gegeven zijn twee stromen waarvoor geldt dat $I_1 = 20$ A en $I_2 = 10$ A. De stromen lopen in lange rechte draden. Tussen de draden is een afstand van 10,0 cm. Bereken de magnetische veldsterkte in het punt P, dat precies in het midden tussen de draden ligt.

$$B = 8.9 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}$$



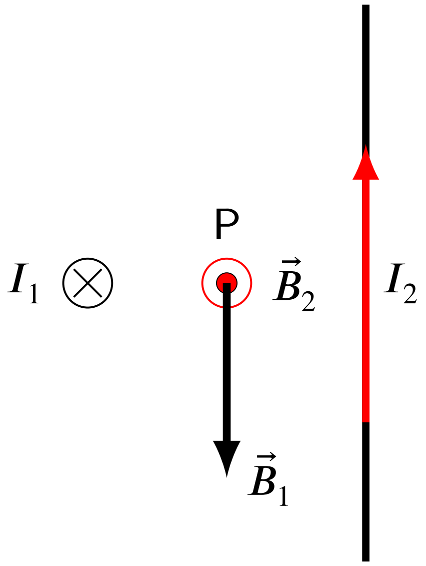
Uitwerking: Elke stroomdraad wekt een magnetisch veld op. Het totale veld is dus de vectoriële som:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

De afstand tot beide stroomdraden is gelijk en er is gegeven dat de tweede stroomsterkte de helft is van de eerste. Bijgevolg is $B_2 = \frac{B_1}{2}$. Met behulp van de rechterhandregel vind je dat beide veldvectoren loodrecht op elkaar staan.

CC BY-NC-SA 4.0

13.6.C Gevorderde oefeningen



We berekenen de veldsterkte voor elke stroom afzonderlijk:

$$B_1 = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi \cdot r} = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \cdot \frac{20\ \text{A}}{2\pi \cdot 0,050\,\text{m}} = 8,0 \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$

en

$$B_2 = \frac{B_1}{2} = 4,0 \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$

Omdat de bijhorende veldvectoren loodrecht op elkaar staan, berekenen we de totale veldsterkte met behulp van de stelling van Pythagoras: $B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = 8,9 \cdot 10^{-5}\ \text{T}$

CC BY-NC-SA 4.0

13.6.D Oefeningen Usolv-it

Oefening 13.6.10. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over het magnetisch veld via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Intro elektromagnetische kracht

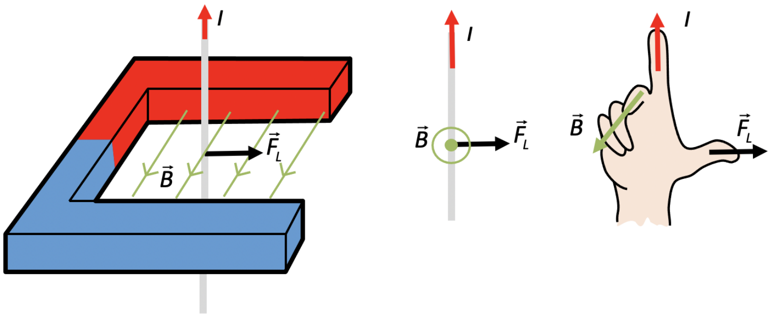
In de vorige hoofdstukken heb je geleerd dat een elektrische stroom een magnetisch veld rond zich opwekt. In dit hoofdstuk leer je dat ook het omgekeerde geldt : een magnetisch veld oefent een 'Lorentz'-kracht uit op een bewegende elektrische lading. Het gevolg hiervan is dat een magnetisch veld ook een 'Laplace'-kracht uitoefent op een elektrische stroom, die immers uit massaal veel bewegende elektrische ladingen bestaat.

CC BY-NC-SA 4.0

14.2 De elektromagnetische krachtwerking

14.2.1 De Laplacekracht

De proef van Oersted, met de kompasnaaldjes in de buurt van de rechte stroomdraad, toonde ons hoe een elektrische stroom een kracht kan uitoefenen op een magneet. Maar ook het omgekeerde is waar: een magnetisch veld van een magneet oefent ook een kracht uit op bewegende elektrische ladingen en dus ook op een stroomdraad. Die kracht noemt men soms de Laplacekracht.



Figuur 88 – Kracht op een stroomvoerende geleider in een magnetisch veld. De kracht staat loodrecht op de stroomdraad en ook loodrecht op de veldlijnen.

Experimenteel vind je volgend resultaten:

(a) het aangrijpingspunt van de kracht is de draad.

(b) de richting: de kracht staat loodrecht op het vlak gevormd door de draad en het magnetische veld op die plaats.

(c) de zin van de Laplacekracht kun je onthouden met de regel van de Laplace (RVL): als je de wijsvinger (Index) van je rechterhand volgens de conventionele stroomzin I houdt en je Middenvinger in de zin van het Magnetische veld, geeft je duim de zin van de kracht aan.

(d) de grootte van de kracht hangt o.a. af van de sterkte van de stroom en de sterkte van het veld op de plaats van de stroomdraad. (We bekijken enkel gevallen waarin de sterkte van het magneetveld gelijk is over de hele draad.)

Eigenschap 14.2.1. Met een gedetailleerd onderzoek, kan je nagaan dat de grootte van de Laplacekracht F_L op een stroomdraad met stroom I en lengte ℓ, die zich in een magnetisch veld $\vec{B}$ bevindt, gelijk is aan

$$F_L = B \cdot I \cdot \ell \cdot \sin(\vec{B}, I)$$

. N.B. Hierbij kunnen we voor de sterkte B van het magneetveld eventueel gebruik maken van uitdrukkingen uit een vorig hoofdstuk.

Opmerking 14.2.1. Via deze wet kunnen we de eenheid tesla van magnetisch veld, schrijven in termen van gekende eenheden. De grootte van het magnetisch veld $\vec{B}$ dat een kracht $\vec{F_L}$ veroorzaakt op een stroomdraad met lengte ℓ waardoor een stroom I vloeit, is gelijk aan

$$B = \frac{F_L}{I \cdot \ell \cdot \sin(\vec{B}, I)}.$$

Dus de eenheid van B, de tesla, is gedefinieerd als : $1\ \mathrm{T} = 1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

14.2 De elektromagnetische krachtwerking

14.2.2 De Lorentzkracht

De kracht van een magnetisch veld op één afzonderlijke bewegende elekrische lading noemt men de Lorentzkracht $\vec{F}_L$.

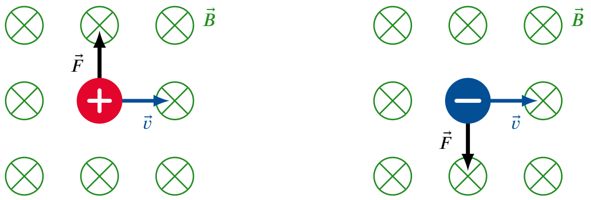
Experimenteel blijkt dat die kracht volgende kenmerken heeft:

(a) het aangrijpingspunt van de kracht is de bewegende lading;

(b) de richting: de kracht staat loodrecht op het vlak gevormd door bewegingsrichting van de lading en de magnetische veldlijnen op die plaats;

(c) de zin van de kracht op een positieve lading vind je ook hier met de RVL. Voor een negatieve lading moet je de zin van de kracht omkeren.

Opmerking 14.2.2. Merk op dat, in gelijke omstandigheden, de magnetische kracht op een negatieve lading dus even groot maar omgekeerd gericht is aan de kracht op een positieve lading. Hetzelfde fenomeen hebben we in een vorig hoofdstuk ook al vastgesteld bij de elektrische coulombkracht.



Figuur 89 – Kracht op een bewegende lading in een magnetisch veld. Deze magnetische kracht staat loodrecht op de bewegingsrichting en op de veldlijnen.

Definitie 14.2.1. Op een lading Q die met snelheid v in een magnetisch veld met grootte B beweegt, werkt de Lorentzkracht. Deze heeft als grootte:

$$F_L = B \cdot |Q| \cdot v \cdot \sin(\vec{B}, \vec{v}).$$

N.B. Ook hierbij kunnen we voor de sterkte B van het magneetveld eventueel gebruik maken van uitdrukkingen uit het vorig hoofdstuk.

Opmerking 14.2.3. De Lorentzkracht op elke afzonderlijke elektrische lading vormt de microscopische verklaring van de Laplacekracht op de hele stroomdraad.

Oefening 14.2.1. Een magnetisch veld oefent een kracht naar links uit van $8,5 \cdot 10^{-14}$ N op een proton dat verticaal omhoog beweegt met een snelheid van $6,0 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Het veld is horizontaal gericht en maakt een hoek van 90° met de bewegingsrichting van het proton. Bereken de magnetische veldsterkte.

Uitwerking: De Lorentzkracht wordt gegeven door

$$F_L = B \cdot |Q| \cdot v \cdot \sin(\vec{B}, \vec{v}).$$

CC BY-NC-SA 4.0

14.2 De elektromagnetische krachtwerking

Hieruit berekenen we dat

$$\begin{aligned} B &= \frac{F_L}{|Q| \cdot v \cdot \sin(\vec{B}, I)} \\ &= \frac{8,5 \cdot 10^{-14}\ N}{1,60 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 6,0 \cdot 10^{6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 90°} \\ &= 0,089\ T \end{aligned}$$

Besluit De veldsterkte bedraagt 0,089 T.

Opmerking 14.2.4. In het algemeen, als een bewegende lading zich in een 'elektromagnetisch veld' bevindt, d.w.z. een gebied waar een elektrisch veld $\vec{E}$ en/of een magnetisch veld $\vec{B}$ heerst, dan wordt de Lorentzkracht gedefinieerd als de resulterende kracht van beide velden op die lading :

$$\vec{F}_L = Q \cdot \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Ze bestaat dus uit twee stukken: een elektrische kracht en een magnetische kracht. In dit hoofdstuk hebben we enkel de magnetische kracht beschouwd. De elektrische kracht kennen we uit een vorig hoofdstuk.

14.3 Oefeningen Magnetische kracht

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

A) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

B) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

C) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

14.3.A Instapoefeningen

Oefening 14.3.1. Door een kabel in een railsysteem voor lampen loopt een stroom van 10 A. De kabel maakt een hoek van 30° met het magnetisch veld van de Aarde. De sterkte van dit veld is $4,5 \cdot 10^{-5}$T. Hoe groot is de kracht op een stuk van 100 m van deze kabel?

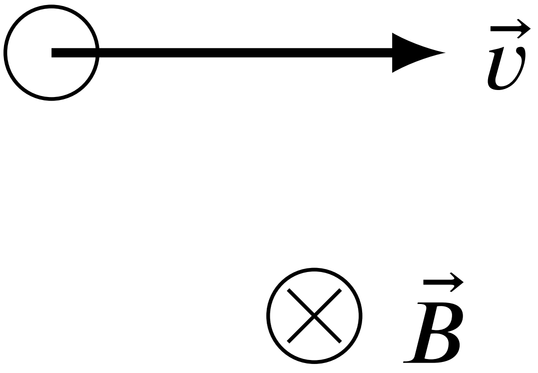
$$F = 2.0 \ N$$

Uitwerking: De grootte van de magnetische kracht op een stroomdraad is

$$\begin{aligned} F &= B \cdot I \cdot \ell \cdot \sin\left(\vec{B}, I\right) \\ &= 4,5 \cdot 10^{-5}\mathrm{T} \cdot 10 \ \mathrm{A} \cdot 100 \ \mathrm{m} \cdot \sin(30°) \\ &= 0,023 \ \mathrm{N} \end{aligned}$$

Oefening 14.3.2. Een lading $Q = -10\ \mu$C beweegt door een magnetisch veld waarvoor geldt dat $B = 120$ mT (zie figuur). Hoe groot is de magnetische kracht op deze lading als deze aan een snelheid van 3000 km/h voortbeweegt.

$$F = 8.9 \cdot 10^{-5} \ \mathrm{T}$$



Uitwerking: De magnetische kracht (Lorentzkracht) op een vrij bewegende lading wordt gegeven door:

$$F = B \cdot |Q| \cdot v \cdot \sin\left(\vec{B}, v\right)$$

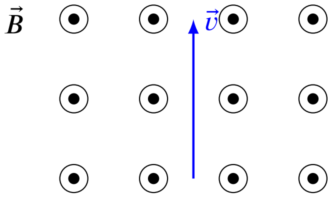
Uit de figuur blijkt dat de hoek tussen de bewegingrichting van de lading en de richting van het veld 90° is. Daardoor bekomen we:

$$F = 0,120 \ \mathrm{T} \cdot \left|-10 \cdot 10^{-6} \ \mathrm{C}\right| \cdot \frac{3000}{3,6} \frac{m}{s} \cdot \sin(90°) = -0,0010 \ \mathrm{N}$$

Oefening 14.3.3. Bepaal de richting van de kracht op een elektron dat beweegt door een magnetisch veld, zoals weergegeven op de figuur.

CC BY-NC-SA 4.0

14.3.A Instapoefeningen



Uitwerking: De rechterhandregel geeft een kracht aan die horizontaal naar rechts wijst, maar omdat de lading negatief is, moet je de zin omkeren: de kracht op het elektron wijst horizontaal naar links.

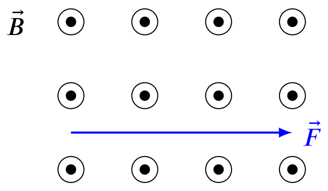
Oefening 14.3.4. In een experiment zien deeltjesfysici een onbekend deeltje dat niet afgebogen wordt wanneer het een magnetisch veld binnendringt. Geef een aantal mogelijke oorzaken.

Uitwerking: De magnetische kracht (Lorentzkracht) werkt enkel op geladen deeltjes wanneer deze bewegen doorheen een magnetisch veld. Het feit dat het onbekende deeltje niet afbuigt zou erop kunnen wijzen dat het niet-geladen is. Indien het een geladen deeltje betreft, wordt het niet afgebogen wanneer het evenwijdig met de veldlijnen beweegt. De hoek tussen de bewegingsrichting en de richting van het magnetisch veld is dan $0°$ of $180°$. In beide gevallen wordt de sinus nul in de formule voor de Lorentzkracht.

CC BY-NC-SA 4.0

14.3.B Standaardoefeningen

Oefening 14.3.5. Bepaal de richting van de snelheid van een proton dat beweegt door een magnetisch veld, waarop een magnetische kracht werkt zoals weergegeven op de figuur.



Uitwerking: De rechterhandregel geeft een snelheid aan die verticaal omhoog wijst.

Oefening 14.3.6. De invloed van het magnetisch veld van de Aarde zie je maar zelden in het dagelijkse leven, met uitzondering van het gebruik van een kompas. Maar we kunnen in principe het magneetveld van de Aarde ook aantonen met behulp van een elektrisch geladen bol die we opladen door over de bol te wrijven met een zijden doekje. De bol krijgt daardoor een lading van 25 nC. Welke magnetische kracht zou de bol ervaren als we ze weggooien in westelijke richting met een snelheid van 15 m/s. Je mag aannemen dat het magnetisch veld van de Aarde precies naar het noorden wijst en op die plaats $4,5 \cdot 10^{-5}\mathrm{T}$ groot is.

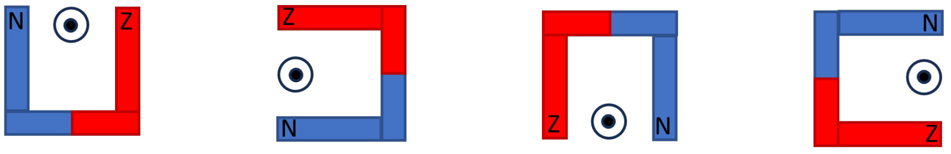
$$F = 1.7\ 10^{-11}\mathrm{N}$$

Uitwerking: De grootte van de magnetische kracht op de bewegende lading is gelijk aan

$$\begin{aligned} F &= B \cdot |Q| \cdot v \cdot \sin\left(\vec{B}, \vec{v}\right) \\ &= 4,5 \cdot 10^{-5}\mathrm{T} \cdot 25 \cdot 10^{-9}\mathrm{C} \cdot 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sin(90°) \\ &= 1,7 \cdot 10^{-11}\mathrm{N} \end{aligned}$$

Deze kracht is inderdaad zo klein dat je er niets van merkt bij het weggooien van de geladen bol.

Oefening 14.3.7. Op de figuur zie je een elektron dat naar jou toe beweegt tussen de polen van een hoefijzermagneet. In welke opstelling zal het elektron omhoog geduwd worden?



A B C D

1. **Meerkeuze:**

(a) A
(b) B
(c) C ✓
(d) D

CC BY-NC-SA 4.0

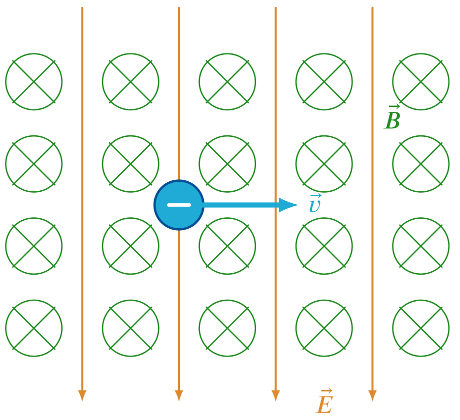
14.3.B Standaardoefeningen

Uitwerking: Volgens de rechterhandregel waarbij je wijsvinger de beweging aangeeft van de lading en de middenvinger de richting van het magnetisch veld, zal de duim de richting en zin van de kracht aangeven. In geval C bekom je dat je duim omlaag wijst. Omdat de lading negatief is, moet je de zin omdraaien. Dat betekent dat de kracht omhoog wijst.

CC BY-NC-SA 4.0

14.3.C Gevorderde oefeningen

Oefening 14.3.8. Een elektron beweegt doorheen een combinatie van een elektrisch en een magnetisch veld, zoals weergegeven op de figuur. De snelheid van het elektron is 500 m/s. Als het elektrisch veld 1000 V/m bedraagt, hoe groot moet het magnetisch veld dan zijn opdat het elektron niet afgebogen wordt?



$$B = 2.0\ T$$

Uitwerking: De elektrische kracht is gelijk aan

$$F_{el} = E \cdot |Q| = 1000\ \frac{\text{N}}{\text{C}} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}\text{C} = 1,60 \cdot 10^{-16}\ \text{N}$$

Deze kracht wijst tegen de elektrische veldlijnen in, dus naar boven in de figuur.

De magnetische kracht is gelijk aan

$$F_{magn} = B \cdot |Q| \cdot v$$

Deze kracht wijst naar beneden op de figuur.

Om niet afgebogen te worden maar rechtlijnig vooruit te beweging, moet de resulterende kracht op het elektron nul zijn. De twee krachten moeten hiervoor niet alleen tegengesteld gericht zijn (wat hier in orde is), maar ook even groot zijn.

$$F_{el} = F_{magn}$$

Invullen en omvormen naar B geeft ons de nodige veldsterkte om het elektron rechtdoor te laten gaan.

$$B = \frac{F_{el}}{|Q| \cdot v} = \frac{1,60 \cdot 10^{-16}\ \text{N}}{1,60 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 500\ \text{m/s}} = 2,0\ \text{T}$$

Het veld moet daarvoor dus $2,0$ T bedragen.

Oefening 14.3.9. Twee stroomdraden zijn verticaal naast elkaar gespannen op een afstand van 25 cm. De stroom doorheen beide draden is $I = 10$ A en loopt in beide draden verticaal omhoog. Hoe groot is de kracht per meter die de linkerdraad op de rechterdraad uitoefent?

$$F = 8.0 \cdot 10^{-5}\ \text{N}$$

CC BY-NC-SA 4.0

14.3.C Gevorderde oefeningen

Uitwerking: Op de rechterdraad werkt een magnetische kracht (Laplacekracht) omdat die zich in het magnetisch veld van de linkerdraad bevindt. Deze kracht wordt berekend met de formule

$$F_2 = B_1 \cdot I_2 \cdot \ell \cdot \sin\left(\vec{B}_1, I_2\right)$$

We berekenen nu eerst het magnetisch veld ter hoogte van de rechterdraad.

$$B_1 = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi \cdot r} = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \cdot \frac{10 \text{ A}}{2\pi \cdot 0,25 \text{m}} = 8,0 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

Bijgevolg vinden we voor de kracht op de rechterdraad

$$\begin{aligned} F_2 &= 8,0 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot 10 \text{ A} \cdot 1,0 \text{ m} \cdot \sin(90°) \\ &= 8,0 \cdot 10^{-5} \text{ N} \end{aligned}$$

Oefening 14.3.10. Een vliegtuig met een vleugelspanwijdte van 50,0 m vliegt aan een snelheid van $720 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ horizontaal over de Noordpool. We nemen aan dat de veldlijnen van het magnetisch veld van de Aarde verticaal lopen op die plaats. De magnetische veldsterkte is $4,90 \cdot 10^{-5}$ T. Welke elektrische spanning ontstaat er over de uiteinden van de vleugels van het vliegtuig?

$$U = 0.490 \text{ V}$$

Uitwerking: We rekenen eerst de snelheid om naar m/s en bekomen zo dat

$$v = 720 \ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 720 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 200 \frac{\text{m}}{s}$$

We nemen aan dat het vliegtuig gemaakt is uit metaal, waardoor zich vrije elektronen in de mantel van het vliegtuig en de vleugels bevinden. Op deze elektronen werkt een magnetische kracht tijdens de beweging van het vliegtuig door het magnetisch veld van de Aarde. Deze kracht is gelijk aan

$$F_m = B \cdot |Q| \cdot v$$

Hierdoor ontstaat aan de ene kant van het vliegtuig een negatieve pool op de uiteinden van de vleugels en aan de andere kant een positieve pool. Daardoor ontstaat een elektrisch veld tussen de uiteinden van de vleugels. Elektronen ervaren dus enerzijds een magnetische kracht vanwege het magnetische veld van de Aarde, maar anderzijds een elektrische kracht vanwege het elektrisch veld dat is ontstaan. De elektrische kracht is gelijk aan

$$F_e = E \cdot |Q|$$

Er ontstaat een evenwicht waarbij dan geldt dat $F_m = F_e$ of dus $B \cdot |Q| \cdot v = E \cdot |Q|$. Hieruit volgt dat

$$E = B \cdot v$$

De spanning die over de uiteinden van de vleugels ontstaat is $U = E \cdot \ell$ of dus $U = B \cdot v \cdot \ell$. We vullen de gegevens in en bekomen zo dat

$$U = 4,90 \cdot 10^{-5} \text{ T} \cdot 200 \frac{\text{m}}{s} \cdot 50,0 \text{ m} = 0,490 \text{ V}$$

Er ontstaat dus een spanning van 0,490 V over de uiteinden van de vleugels.

CC BY-NC-SA 4.0

14.3.D Oefeningen Usolv-it

Oefening 14.3.11. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over magnetisme via het Usolv-it oefenplatform.

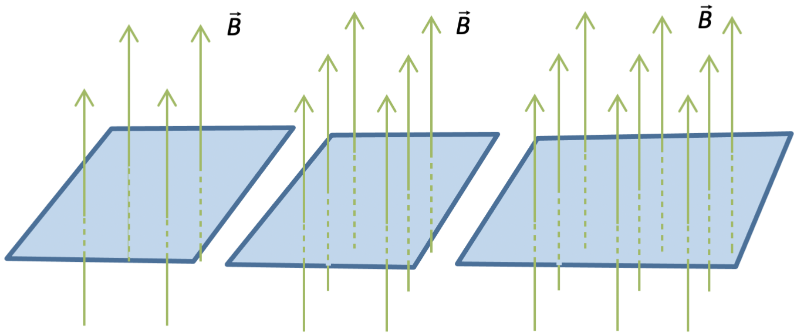
15.1 Intro elektromagnetische inductie

In de vorige hoofdstukken heb je geleerd dat een elektrische stroom een magnetisch veld opwekt en dat een magnetisch veld een kracht uitoefent op een bewegende lading. Je zou je dan ook kunnen afvragen of een magnetisch veld eventueel in staat is om een stroom op te wekken. In dit hoofdstuk zullen we leren dat dit inderdaad mogelijk is. We zullen zien dat dit heel interessante mogelijkheden biedt en heel wat toepassingen kent in ons dagelijks leven.

CC BY-NC-SA 4.0

15.2 Magnetische flux

In onderstaande figuren staan drie oppervlakken loodrecht op een magnetisch veld, dat getoond wordt via zijn veldlijnen. Door elk 'stroomt' een hoeveelheid magnetische veldlijnen. Die 'magnetische stroom' noemen we de **magnetische flux**. We kunnen de grootte van die flux inschatten via het aantal veldlijnen te tellen dat door het oppervlak 'stroomt'. Het meest rechtse oppervlak in de figuur heeft dus de grootste magnetische flux.



Figuur 90 – De magnetische flux doorheen een oppervlak.

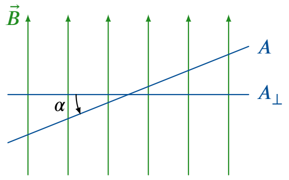
Hoe groter B, hoe groter de magnetische flux ϕ. Immers, bij een sterker veld horen dichter bijeen gelegen veldlijnen.

Hoe groter het oppervlak A, hoe groter de magnetische flux ϕ.

Hoe 'loodrechter' het oppervlak staat tegenover de veldlijnen, hoe groter de magnetische flux.

- Als het oppervlak evenwijdig is met de veldlijnen, is de magnetische flux gelijk aan 0. Immers, er stromen dan geen veldlijnen door het oppervlak.

- Als het oppervlak A schuin staat t.o.v. de veldlijnen, moet je de hoek α tussen oppervlak A en de stand $A_\perp$ in rekening brengen.



Vandaar de definitie:

Definitie 15.2.1. De magnetische flux ϕ door een oppervlak A is

$$\phi = B \cdot A \cdot \cos\alpha.$$

α is de hoek tussen A en haar 'loodrechte projectie' $A_\perp$.

Magnetische flux ϕ, wordt uitgedrukt in $T \cdot m^2$. Die eenheid noemt men de weber:

$$1\ Wb = 1\ T \cdot m^2.$$

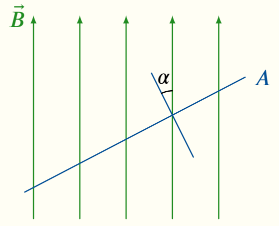
- Als het oppervlak A loodrecht op de veldlijnen staat is $\alpha = 0°$ en is $\phi = B \cdot A \cdot \cos 0° = B \cdot A$.

- Als het oppervlak A evenwijdig is met de veldlijnen is $\alpha = 90°$ en is $\phi = B \cdot A \cdot \cos 90° = 0$.

CC BY-NC-SA 4.0

15.2 Magnetische flux

Opmerking 15.2.1. De hoek α tussen oppervlak A en $A_\perp$ is ook gelijk aan de hoek tussen de veldlijnen en een loodlijn op het oppervlak A. Deze is dus NIET gelijk aan de hoek tussen het oppervlak en de veldlijnen.



CC BY-NC-SA 4.0

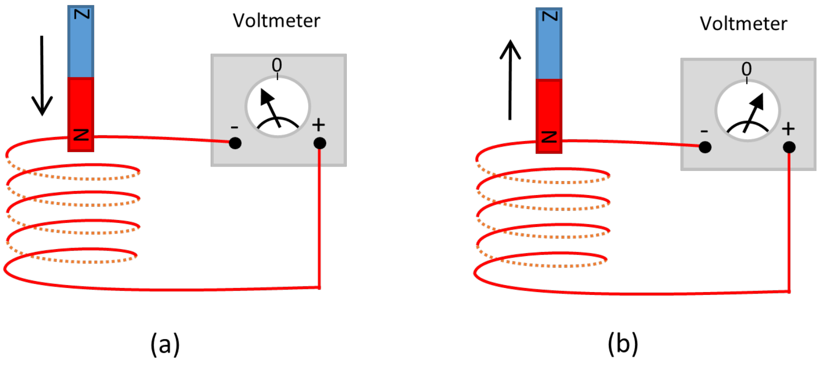
15.3 Elektromagnetische inductie

15.3.1 Het fenomeen magnetische inductie

In 1831 ontdekten Michael Faraday en Joseph Henry onafhankelijk van elkaar dat langsheen een (niet-stroomvoerende) winding een elektrische spanning wordt opgewekt als de magnetische flux door die winding verandert. Dat fenomeen noemt men **elektromagnetische inductie**. De opgewekte spanning langsheen de winding noemen we de inductiespanning, symbool U_i.

De magnetische flux door de winding kunnen we bijvoorbeeld veranderen door in de buurt van de winding een staafmagneet te bewegen.

Dit effect is voor één winding vaak vrij klein, maar als we overstappen van een winding op een spoel met N windingen, dan gebeurt de inductie in feite N keer, zodat de totale inductiespanning over de spoel dus N keer groter zal zijn dan in het geval van één enkele winding.



Figuur 91 – Als je de magneet in of uit de spoel schuift, meet je een inductiespanning. Houd je de magneet stil, dan meet je geen spanning.

Eigenschap 15.3.1. Als en zolang de magnetische flux ϕ in een winding **verandert**, ontstaat er langsheen die winding een inductiespanning U_i.

Als bovendien de winding gesloten is, loopt als gevolg daarvan door de winding ook een stroom, de inductiestroom I_i.

Als er een inductiestroom vloeit, ontstaat er als gevolg daarvan rond die stroom een eigen geïnduceerd magnetisch veld $\vec{B}_i$, met eigen geïnduceerde veldlijnen.

15.3.2 De grootte van de inductiespanning

Eigenschap 15.3.2. Experimenteel blijkt dat de grootte van de inductiespanning die opgewekt wordt in een spoel met N windingen door een fluxverandering $\Delta\phi$ in een tijdsinterval Δt, wordt gegeven door

$$|U_i| = N \cdot \left|\frac{\Delta\phi}{\Delta t}\right|.$$

Voor het geval van een winding kunnen we hierin $N = 1$ stellen.

Hoe groter $\Delta\phi$, in een bepaalde tijdsduur Δt, hoe groter $|U_i|$.

Hoe groter N, hoe groter $|U_i|$.

CC BY-NC-SA 4.0

15.3.3 De zin van de inductiespanning

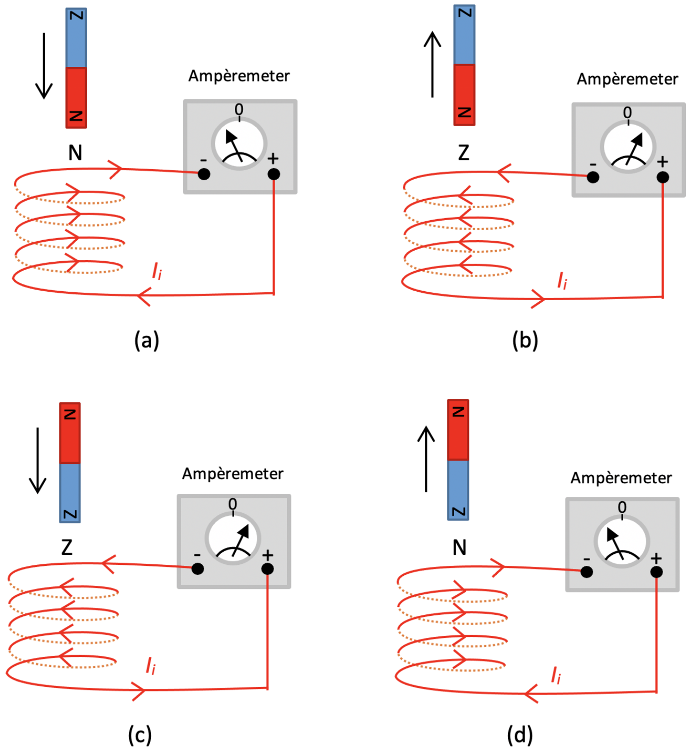
De beweging van de magneet in de buurt van de spoel zorgt voor een fluxverandering in de spoel, waardoor over de uiteinden van de spoel een geïnduceerde spanning ontstaat.

Deze spanning is een gevolg van het feit dat ten gevolge van de fluxverandering een elektrisch veld in de draad ontstaat.

Verbind je nu de uiteinden van de spoel met een Ampèremeter, dan kan je ook een stroom meten. Dat is de inductiestroom.

Bij onderzoek van de inductiestroom, zie je de naald van de Ampèremeter soms naar de ene en soms naar de andere kant uitwijken. Als je vaststelt dat de zin van de stroom verandert, moet dus ook de zin van de inductiespanning veranderd zijn. Die zin onderzoeken we nu.

De onderstaande figuur toont verschillende situaties waarbij telkens een inductiestroom loopt.



Figuur 92 – Als je de magneet in of uit de spoel schuift, meet je een inductiestroom, waarvan de zin afhangt van hoe je de magneet in of uit de spoel schuift.

In figuur a naderen we de spoel met de N-pool van een magneet. Uit de uitwijking van de naald kun je de zin van de inductiestroom bepalen. Die inductiestroom creëert zelf ook een magnetisch veld, het geïnduceerde veld. De veldlijnen van het geïnduceerde veld zijn **tegengesteld** aan het **toenemende aantal** veldlijnen die de magneet in de spoel brengt. Het verhogen van de flux wordt op die manier dus tegengewerkt.

In figuur b verwijderen we de magneet terug. Als je de zin van de veldlijnen van dit geïnduceerde veld bepaalt, vind je dat ze **gelijkgericht** staan aan het **afnemend aantal** veldlijnen dat de magneet in de spoel brengt. De spoel heeft een aantal van de veldlijnen die uit de spoel verdwijnen als de magneet zich verwijdert, weer aangemaakt om het verlies te compenseren.

In figuur c naderen we de spoel met de Z-pool van de magneet. Als je veldlijnen van dit geïnduceerde veld bepaalt, zie je dat ze tegengesteld zijn aan het toenemend aantal veldlijnen dat de magneet in de spoel

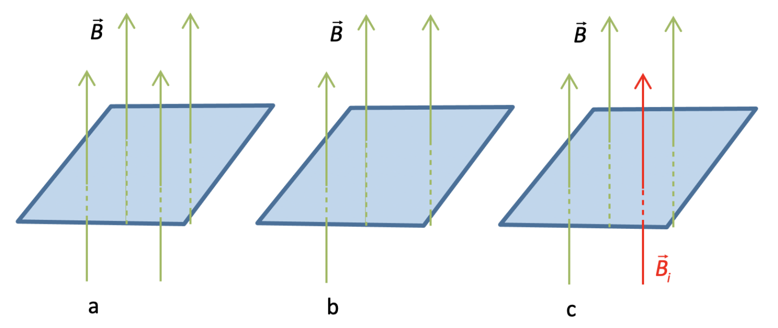
CC BY-NC-SA 4.0

brengt. Het effect van het naderen van de magneet wordt tegengewerkt.

In figuur d verwijderen we de magneet terug. Als je veldlijnen van het geïnduceerde veld bepaalt, zie je dat ze gelijkgericht staan aan het afnemend aantal veldlijnen dat de magneet in de spoel brengt. Het effect van het verwijderen van de magneet wordt tegengewerkt.

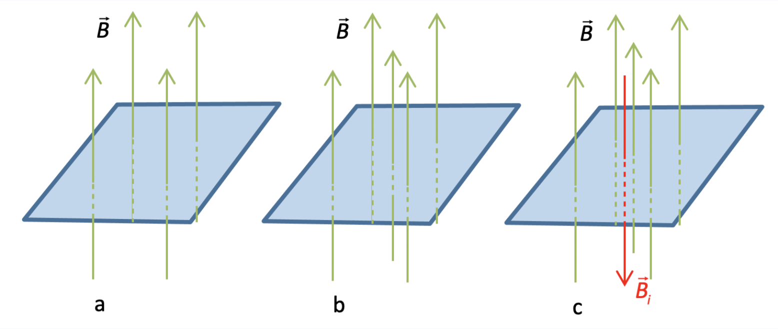
Eigenschap 15.3.3 (De wet van Lenz)**.** De zin van de inductiespanning in een winding die ontstaat door de verandering van de flux door die winding, is steeds zodanig dat die verandering wordt tegenwerkt.

Voorbeeld 15.3.1.



De flux doorheen een kader (a) vermindert (b): deze fluxvermindering wordt tegengewerkt door een geïnduceerd veld op te wekken dat de oorspronkelijke situatie enigszins herstelt (c).

Voorbeeld 15.3.2.



De flux doorheen een kader (a) neemt toe (b): deze fluxvermeerdering wordt tegengewerkt door een geïnduceerd veld op te wekken dat de oorspronkelijke situatie enigszins herstelt (c).

15.3.4 De wet van Faraday

Het feit dat de geïnduceerde spanning steeds de fluxverandering tegenwerkt, vertaalt zich in een minteken in de formule voor de inductiespanning:

$$U_i = -N \cdot \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

Deze formule noemt men de inductiewet van Faraday.

CC BY-NC-SA 4.0

15.4 De transformator

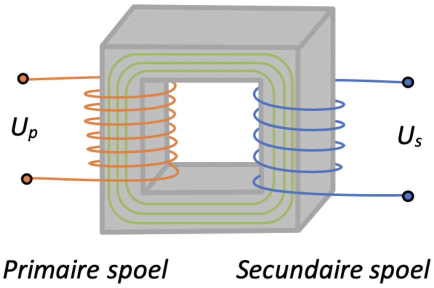
Dikwijls is het nodig een wisselspanning te verhogen of te verlagen. Hiervoor gebruikt men een transformator. Bv. in een elektriciteitscentrale is de opgewekte spanning 6000 V. Die spanning wordt opgetransformeerd tot 380 000 V en dan getransporteerd via hoogspanningslijnen. Door transport onder hoogspanning is het energieverlies veel kleiner. Vooraleer bij de gebruiker te worden binnengebracht, verlaagt men die spanning in verschillende stappen terug tot 380 V of 230 V.

Om bijvoorbeeld een gsm op te laden wordt de netspanning via een adapter nog verder verlaagd tot de gewenste laagspanning (vb. 6 V).

Een transformator bestaat uit een weekijzeren kern waarrond twee spoelen gewikkeld zijn.

(a) De eerste spoel vormt de primaire spoel en heeft N_p windingen.

(b) De tweede spoel is de secundaire spoel en heeft N_s windingen.



Figuur 93 – Schematische voorstelling van een transformator.

De primaire spoel wordt aangesloten op een sinusoïdale wisselspanning U_p. Die wisselspanning veroorzaakt een wisselend magnetisch veld. Dat wisselend veld (lichtgroene veldlijnen op de figuur) loopt door de weekijzeren kern (lichtgrijs op de figuur), en zo dus ook door de secundaire spoel. Door de fluxverandering ontstaat in de secundaire spoel een sinusoïdale inductiespanning U_s.

Experimenteel kan men vaststellen dat

$$\frac{\Delta\phi_P}{\Delta t} = \frac{\Delta\phi_S}{\Delta t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{U_P}{N_P} = \frac{U_s}{N_s}$$

Hieruit volgt dat

$$U_S = \frac{N_S}{N_P} \cdot U_P$$

CC BY-NC-SA 4.0

15.4 De transformator

De wisselspanning U_s over de secundaire spoel hangt dus enkel af van de wisselspanning U_p over de primaire spoel en de verhouding van het aantal windingen.

Voorbeeld 15.4.1. Als de primaire spoel 600 windingen telt, de secundaire 200 en de netspanning 230 V bedraagt, geldt voor de secundaire spanning dat

$$U_S = \frac{200}{600} \cdot 230\ V = 76,7\ V$$

Opmerking 15.4.1. Het is belangrijk even stil te staan bij het feit dat deze techniek van transformeren van spanning op flux**veranderingen** in de spoelen berust, en dus enkel werkt voor wisselspanning.

CC BY-NC-SA 4.0

15.5 Oefeningen Magnetische flux

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

A) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

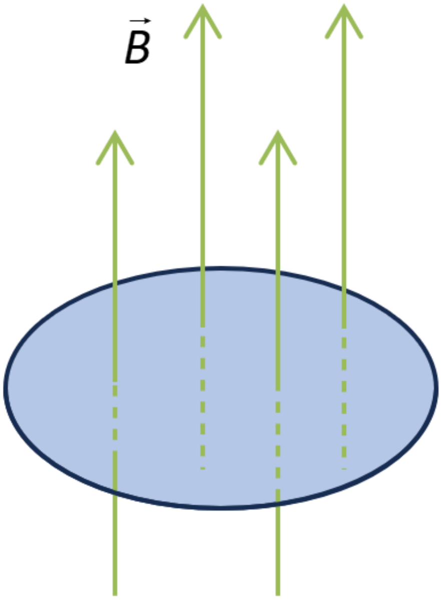
B) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

C) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

15.5.A Instapoefeningen

Oefening 15.5.1. Op de figuur zie je een cirkelvormig oppervlak dat zich in een magnetisch veld bevindt. De straal van de cirkel is 15,0 cm en $B = 0,20$ T. Hoe groot is de magnetische flux doorheen dit oppervlak?



$$\phi = 0.014 \text{ Wb}$$

Uitwerking: De formule voor de magnetische flux is gelijk aan $\phi = B \cdot A \cdot \cos(\alpha)$. De oppervlakte van een cirkel is

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (0,15 \text{ m})^2 = 0,71 \text{ m}^2$$

Omdat de hoek tussen de magnetische veldlijnen en het oppervlak een rechte hoek is, vinden we dat

$$\phi = 0,20 \text{ T} \cdot 0,071 \text{ m}^2 \cdot \cos(0°) = 0,014 \text{ Wb}$$

Oefening 15.5.2. Een gelijkzijdige driehoek met een zijde van 6 cm bevindt zich in een homogeen magnetisch veld van 6,0 mT. De magnetische flux doorheen de driehoek bedraagt 8,0 μWb. Hoe groot is de hoek tussen de magnetische veldlijnen en een loodlijn op het oppervlak van de driehoek?

$$\theta = 31\ °$$

Uitwerking: Hier kan de vergelijking voor de magnetische flux gebruikt worden:

$$\phi = AB\cos\theta \Rightarrow \theta = Bgcos\left(\frac{\phi}{AB}\right) = Bgcos\left(\frac{8,0 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}}{\left(\sqrt{3}/4\right)(0,06 \text{ m})^2(6,0 \cdot 10^{-3} \text{ T})}\right) = 31°$$

CC BY-NC-SA 4.0

15.5.A Instapoefeningen

Oefening 15.5.3. Een magneet wordt in een spoel geduwd met 1200 windingen waarvan de straal van één winding 5,00 cm bedraagt. Hierdoor varieert de waarde van $B \cdot \cos\alpha$ van 0 T tot 0,250 T in 0,55 s. Hoe groot is de gemiddelde geïnduceerde spanning?

$$U = 4.3\ V$$

Uitwerking: We gebruiken de formule $\left|U_{i,g}\right| = N \cdot \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|$. Er is gegeven dat $N = 1200$ en $\Delta t = 0,55$ s.

We bepalen nu de fluxverandering in één winding:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Delta\left(BA \cdot \cos\alpha\right)\\ &= A \cdot \Delta\left(B \cdot \cos\alpha\right)\\ &= \pi \cdot r^2 \cdot \Delta\left(B \cdot \cos\alpha\right)\\ &= \pi \cdot (0,0500\ \text{m})^2 \cdot 0,250\ \text{T}\\ &= 0,00196\ \text{Wb}\end{aligned}$$

Bijgevolg is de gemiddelde geïnduceerde spanning gelijk aan

$$\left|U_{i,g}\right| = 1200 \cdot \left|\frac{0,00196\ \text{Wb}}{0,55\ \text{s}}\right| = 4,3\ \text{V}$$

Oefening 15.5.4. Een draagbaar röntgentoestel heeft een step-up transformator waarvan de 230 V -ingang wordt getransformeerd naar de 100 kV - uitgang die de röntgenbuis nodig heeft. De primaire spoel heeft 50 windingen en trekt een stroom van 10,00 A als hij in gebruik is. Wat is het aantal windingen in de secundaire spoel?

$$N = 21.7 \cdot 10^3$$

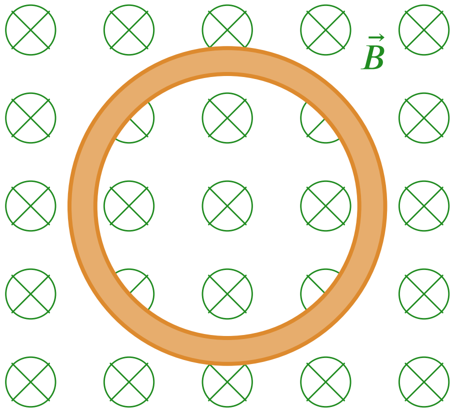
Uitwerking: Voor een transformator geldt dat $\frac{U_P}{N_P} = \frac{U_S}{N_S}$. Hieruit kunnen we het aantal lussen in de secundair spoel bepalen:

$$\begin{aligned}N_S &= \frac{U_S}{U_P} \cdot N_P\\ &= \frac{100 \cdot 10^3\ \text{V}}{230\ \text{V}} \cdot 50\\ &= 21,7 \cdot 10^3\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

15.5.B Standaardoefeningen

Oefening 15.5.5. Een koperen lus met diameter 10 cm bevindt zich in een veranderend magnetisch veld. Veronderstel dat het veld toeneemt met $0,50$ T per seconde. De weerstand van de koperen lus is $0,20\ \Omega$. Hoe groot is de geïnduceerde stroom? Loopt deze stroom in wijzerzin of tegenwijzerzin?



$20\ mA$ in tegenwijzerzin✓.

Uitwerking: De grootte van de geïnduceerde spanning bedraagt $|U_i| = \left|\frac{\Delta\phi}{\Delta t}\right|$ en de geïnduceerde stroom bedraagt $I_i = \frac{|U_i|}{R}$. Het veld B verandert, maar de oppervlakte A niet. Omdat het oppervlak van de lus loodrecht op de veldlijnen staat geldt dat $\phi = AB$. Dan geldt dat de grootte van de spanning door toepassing van de wet van Faraday gegeven wordt door

$$|U_i| = A\left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| = \pi r^2\left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| = \pi(0,050\ \mathrm{m})^2 \cdot \frac{0,50\ \mathrm{T}}{1\ \mathrm{s}} = 3,9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{V}$$

en dan wordt de stroom gegeven door

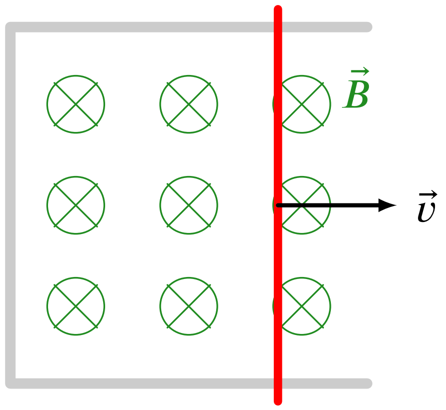
$$I = \frac{|U_i|}{R} = \frac{3,93 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{V}}{0,20\ \Omega} = 2,0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{A} = 20\ \mathrm{mA}$$

Het veld neemt toe in de zin naar de pagina. Het geïnduceerde veld werkt deze verandering tegen en moet dus uit de pagina wijzen. Hiervoor moet de geïnduceerde stroom in **tegenwijzerzin** stromen.

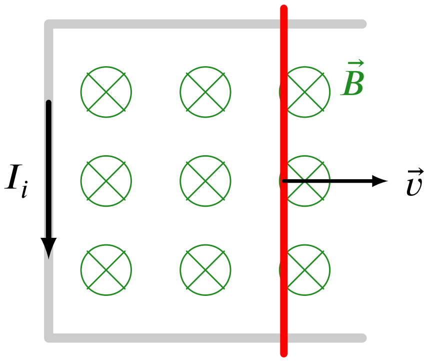
Oefening 15.5.6. Op de figuur zie je een metalen kader waarop een koperen buis verschoven wordt. Het geheel bevindt zich in een magnetisch veld. Teken de geïnduceerde stroom in de winding.

CC BY-NC-SA 4.0

15.5.B Standaardoefeningen



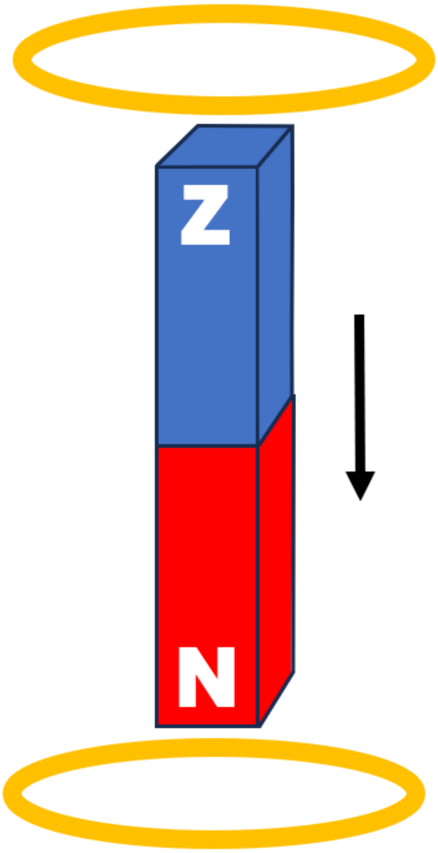
Uitwerking: De flux neemt toe, dus er zal een stroom opgewekt worden die deze toename tegenwerkt. Met de regel van de rechterhand bekom je dan dat de stroom tegenwijzerzin moet vloeien.



Oefening 15.5.7. Op de figuur zie je een staafmagneet met daarboven en daaronder een koperen ring. Hoe vloeien de geïnduceerde stromen in deze ringen als je de magneet omlaag beweegt?

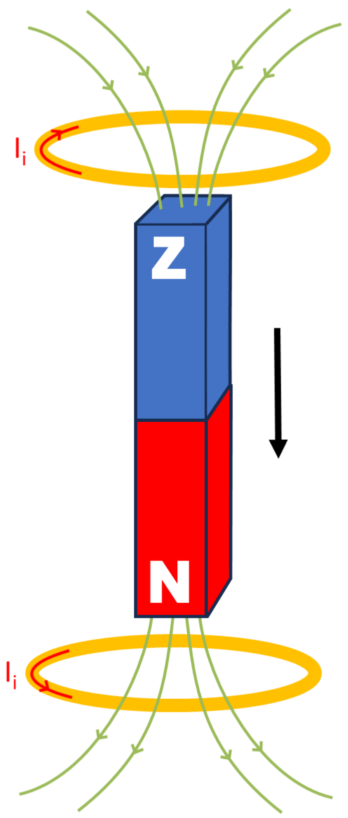
CC BY-NC-SA 4.0

15.5.B Standaardoefeningen



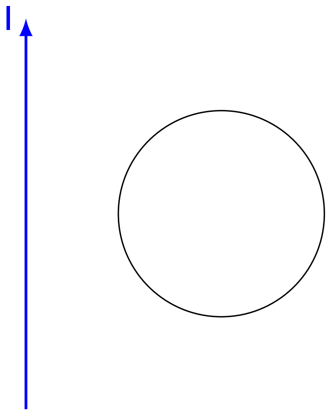
Uitwerking: De magnetische veldlijnen lopen buiten de staafmagneet van de noordpool naar de zuidpool van de magneet. Dat betekent dat in de onderste lus de flux toeneemt met veldlijnen die van boven naar beneden lopen. Om dit te compenseren wordt een geïnduceerd veld opgewekt met veldlijnen die van beneden naar boven lopen. De geïnduceerde stroom loopt bijgevolg zoals aangeduid op de figuur. In de bovenste lus neemt de flux met veldlijnen die van boven naar beneden lopen af. Daarom zal het geïnduceerde veld ook veldlijnen hebben die van boven naar beneden lopen. In de koperen lus stroomt daardoor de geïnduceerde stroom zoals aangeduid op de figuur.

CC BY-NC-SA 4.0


Ii
Z
N
Ii

15.5.C Gevorderde oefeningen

Oefening 15.5.8. Op de figuur wordt een rechte stroomdraad getoond met daarnaast een koperen lus.



1. Als de stroom in de rechte draad afneemt, in welke zin zal de geïnduceerde stroom in de lus dan vloeien?

Uitwerking: De rechterhandregel geeft aan dat de veldlijnen in het blad gericht staan in de lus. Als de stroom afneemt zal dit veld verzwakt worden. De wet van Lenz leert ons dat deze verandering wordt tegengewerkt door een geïnduceerde stroom die veldlijnen opwekt die in het blad gericht staan. Met de rechterhandregel voor een lus vinden we dan dat de geïnduceerde stroom in **wijzerzin** loopt in de lus.

2. Als de lus naar links, naar de draad toe beweegt, in welke zin zal de geïnduceerde stroom in de lus dan vloeien?

Uitwerking: De rechterhandregel geeft aan dat de veldlijnen van het veld dat de stroomdraad opwekt in het blad gericht staan ter hoogte van de lus. Als de lus naar de draad toe beweegt, neemt de sterkte van het veld in de lus toe. De wet van Lenz leert ons dat deze verandering wordt tegengewerkt door een geïnduceerde stroom die veldlijnen opwekt die tegengesteld zijn aan het veld dat de stroomdraad opwekt. Met de rechterhandregel voor een lus vinden we dan dat de geïnduceerde stroom in **tegenwijzerzin** loopt in de lus.

CC BY-NC-SA 4.0

15.5.D Oefeningen Usolv-it

Oefening 15.5.9. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over inductiespanning via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

16.1 Intro kernfysica

In de eerste helft van de twintigste eeuw toonde Rutherford met experimenten aan dat in elk atoom een massieve kern aanwezig was. In dit hoofdstuk bestuderen we de eigenschappen van die atoomkern. We bespreken verschillende vormen van radioactiviteit en gaan na hoe radioactief verval in veel verschillende takken van de wetenschap (vb. geneeskunde, archeologie, ...) een rol speelt.

CC BY-NC-SA 4.0

16.2 Begrippen

In de kernfysica bestudeert men processen die zich afspelen op niveau van de kern van een atoom. De bouwstenen van een atoomkern zijn protonen en neutronen. We noemen die deeltjes ook nucleonen.

Het aantal protonen in de kern van een atoom noemt men het protonental of **atoomnummer** Z. Dat nummer is specifiek voor een atoomsoort of (chemisch) element. Er bestaan meer dan 100 elementen. Bv. $Z(\mathrm{Fe}) = 26$: elk ijzeratoom heeft 26 protonen.

Het aantal neutronen in de kern van een atoom noemt men het **neutronental** N. Deze waarde is niet specifiek voor een element. Bv. een ijzeratoom kan 28, 29, 30 ... neutronen bevatten.

Het aantal kerndeeltjes van de kern noemt men het **massagetal** A van het atoom. Het massagetal is gelijk aan de som van het aantal protonen en neutronen: $A = Z + N$.

Met een **nuclide** bedoelen we een soort atomen met eenzelfde atoomnummer en eenzelfde neutronengetal en dus met eenzelfde massagetal. Er bestaan meer dan 2500 verschillende soorten nucliden.

Een nuclide X met protonental Z en massagetal A stellen we voor als ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$.

Bv. ${}^{18}_{8}\mathrm{O}$. Deze nuclide heeft 8 protonen, 18 kerndeeltjes en dus 10 neutronen.

De verschillende nucliden van een chemisch element noemt men de **isotopen** van dat element.

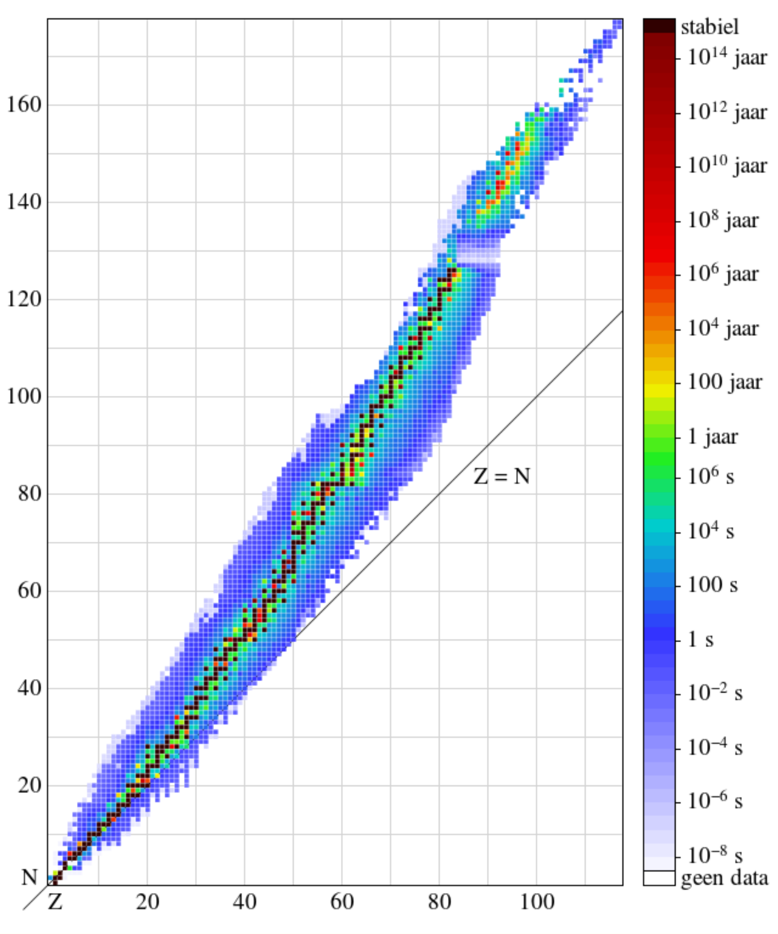
Bv. het element zuurstof heeft 15 isotopen: ${}^{12}_{8}\mathrm{O}, {}^{14}_{8}\mathrm{O}, \ldots, {}^{26}_{8}\mathrm{O}$

We noteren die nucliden ook als $\mathrm{O} - 12$, $\mathrm{O} - 13$ ...

> **Opmerking 16.2.1.** Op de zogenaamde nuclidenkaart worden alle gekende nucliden weergegeven in een $N(Z)$-grafiek. Een nuclide die op de bissectrice ligt, heeft evenveel protonen als neutronen.
>
> De meeste nucliden liggen boven de bissectrice: voor deze nucliden is de **kernverhouding** N/Z groter dan één en het **neutronenoverschot** $N - Z$ is positief.

CC BY-NC-SA 4.0

16.2 Begrippen



Figuur 94 – Nuclidenkaart (Bron: https://www.wikiwand.com/nl/Atoomkern)

16.2.1 Massa en energie

De massa van atomen en nucleonen is heel klein. Daarom drukt men de massa daarvan uit in u (unit):

$$\begin{aligned} 1u &= 1/12 \text{ van de massa van een koolstof-12 atoom} \\ &= 1 \text{ g/mol} \\ &= 1 \text{ g}/(6,022 \cdot 10^{23}) \\ &= 1,661 \cdot 10^{-27}\text{kg} \end{aligned}$$

	Proton	**Neutron**	**Elektron**
Massa (u)	$1,007276$	$1,008665$	$0,000549$
Lading (C)	$1,60 \cdot 10^{-19}$		$-1,60 \cdot 10^{-19}$

Opmerking 16.2.2. Een elektron heeft een veel kleinere massa dan een proton, is ook een veel kleiner deeltje, maar heeft toch in absolute waarde dezelfde lading als het proton.

In 1905 publiceerde Einstein zijn 'speciale relativiteitstheorie'. Uit die theorie volgt dat massa en energie equivalent zijn. Massa kan worden omgezet in een energie en omgekeerd.

CC BY-NC-SA 4.0

16.2 Begrippen

Eigenschap 16.2.1. Een massa m komt overeen met een hoeveelheid energie gelijk aan $E = m \cdot c^2$. Dit noemen we de rustenergie van de massa m.

Hierin is c de lichtsnelheid in vacuüm (ongeveer gelijk aan 300 000 km/s).

Voorbeeld 16.2.1. De hoeveelheid energie die kan vrijkomen als $1,00$ g materie in energie wordt omgezet, is gelijk aan

$$\begin{aligned} E &= m \cdot c^2 \\ &= 0,00100 kg \cdot (300000 \cdot 10^3 m/s)^2 \\ &= 9,00 \cdot 10^{13} J \end{aligned}$$

De enorme hoeveelheid energie die vrijkomt bij bv. een kernexplosie of de energie die gebruikt wordt in kerncentrales om elektriciteit te produceren, kan hierdoor verklaard worden.

Eigenschap 16.2.2. Met de formule van Einstein kun je de lichtsnelheid ook schrijven als

$$c^2 = 931 \frac{MeV}{u}$$

Bewijs De energie die overeenkomt met een massa van $1u$, is

$$\begin{aligned} E &= m \cdot c^2 \\ &= 1u \cdot (300000 \cdot 10^3 m/s)^2 \\ &= 1,661 \cdot 10^{-27} kg \cdot (300000 \cdot 10^3 m/s)^2 \\ &= 1,49 \cdot 10^{-10} J \end{aligned}$$

Vermits

$$1eV = 1,60 \cdot 10^{-19} J \qquad \Leftrightarrow \qquad 1J = \frac{1eV}{1,60 \cdot 10^{-19}}$$

is

$$\begin{aligned} E &= 1,49 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{1eV}{1,60 \cdot 10^{-19}} \\ &= 931 \cdot 10^6 eV \\ &= 931 MeV \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$931 MeV = 1u \cdot c^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad c^2 = 931 \frac{MeV}{u}.$$

■

CC BY-NC-SA 4.0

16.3 Bindingsenergie

Een ${}^{2}_{1}$H-kern bestaat uit 1 proton en uit 1 neutron. We berekenen de massa van de onderdelen van de kern:

massa van een proton:	$1,007276\ u$
massa van een neutron:	$1,008665\ u$
massa kern (som):	$2,015941\ u$

Experimenteel vindt men dat de werkelijke massa van een ${}^{2}_{1}$H-atoom gelijk is aan 2,01410 u. Hierin zijn de elektronen meegerekend in de atoommassa. De massa van de kern is dus:

massa van het atoom:	$2,01410\ u$
massa van het elektron:	$0,000549\ u$
massa kern (verschil):	$2,01355\ u$

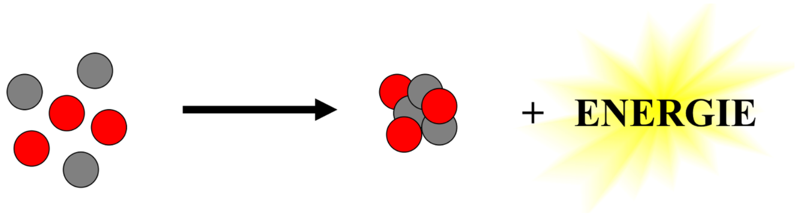
Besluit: De experimentele waarde is niet gelijk aan de verwachte waarde, die we berekend hebben. We moeten hieruit besluiten dat als protonen en neutronen samen een atoomkern vormen, er sprake is van een massaverlies of massadeficit. Soms noemt dit ook het massadefect.

Voor de ${}^{2}_{1}$H-kern is dit massaverlies $2,015941\ u - 2,01355\ u = 0,00239\ u$.

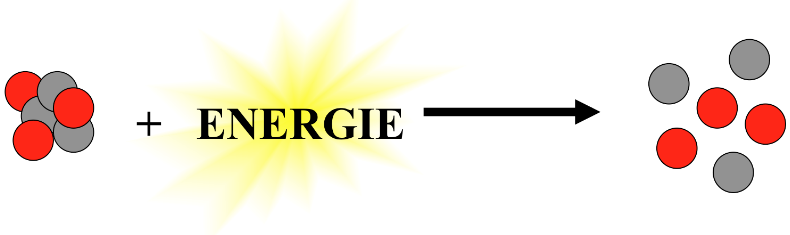
Daarmee komt een hoeveelheid energie overeen die gelijk is aan

$$\begin{aligned} E &= m \cdot c^2 \\ &= 0,00239\ u \cdot \frac{931\ MeV}{u} \\ &= 2,23 MeV \end{aligned}$$

Bij vorming van een ${}^{2}_{1}$H-kern met een proton en een neutron is er massaverlies en komt 2,23 MeV energie vrij.



Wil je een ${}^{2}_{1}$H-kern splitsen in zijn proton en neutron, dan moet er 2,23 MeV energie toegevoegd worden om de bindingen te verbreken. Daarom noemt deze energie de bindingsenergie van de kern. Na de splitsing is de massa van de losse deeltjes (proton en neutron) samen groter dan het oorspronkelijke deeltje (atoomkern).



CC BY-NC-SA 4.0

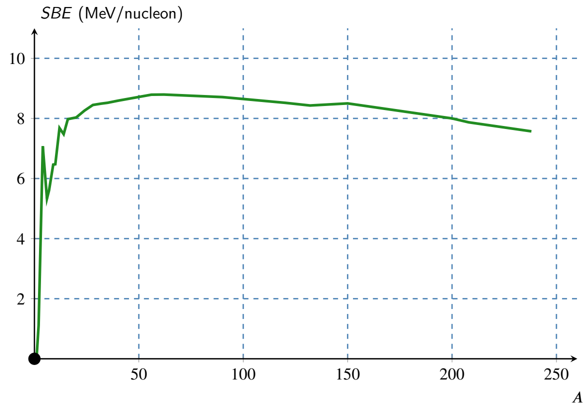
16.3 Bindingsenergie

Definitie 16.3.1. De energie die overeen komt met het massadeficit is de bindingsenergie (BE) van de kern. Dit is de energie die je zou moeten toevoegen om de bindingen tussen de nucleonen te verbreken.

De bindingsenergie per nucleon noemt met de specifieke bindingsenergie (SBE).

Voor ${}_1^2$H bedraagt de specifieke bindingsenergie $2,23$ MeV$/2 = 1,12$ MeV

Hoe groter de specifieke bindingsenergie van een nuclide, hoe meer energie nodig is om de kern te splitsen in afzonderlijke kerndeeltjes en hoe stabieler de kern.



Bovenstaande grafiek toont de specifieke bindingsenergie als functie van het massagetal. De kromme vertoont een maximum bij $A = 62$ ($\text{Ni} - 62$ met $Z = 28$). De kernen in de buurt van deze top zijn het meest stabiel. De kernen van lichtere en zwaardere nucliden zijn minder stabiel.

Uit die grafiek volgt dat uit kernen op twee manieren energie kan worden gewonnen:

(a) Lichte kernen kan je samenvoegen zodat een massadefect optreedt, waardoor er energie wordt uitgestraald. (kernfusie)

(b) Zware kernen kan je splitsen zodat een massadefect optreedt, waardoor er energie wordt uitgestraald. (kernsplijting)

We bekijken dit telkens met een voorbeeld.

Voorbeeld 16.3.1. De fusie van een ${}_8^{16}$O-kern en een ${}_9^{19}$F-kern.

Er ontstaat een nieuwe kern met $8 + 9 = 17$ protonen en $16 + 19 = 35$ kerndeeltjes.

Dit is een ${}_{17}^{35}$Cl-kern.

Massa vóór de fusie		**Massa na de fusie**	
O-atoom	$15,9949\ u$	Cl-atoom	$34,9689\ u$
F-atoom	$18,9984\ u$		
Totale massa	$34,9933\ u$	Totale massa	$34,9689\ u$
Massadefect: $34,9933\ u - 34,9689\ u = 0,0244\ u$			

CC BY-NC-SA 4.0

De energie die vrijkomt bij de fusie is

$$\begin{aligned} E &= m \cdot c^2 \\ &= 0,0244u \cdot \frac{931 MeV}{u} \\ &= 22,7\ MeV \end{aligned}$$

Voorbeeld 16.3.2. De splijting van een ${}^{210}_{82}$Pb-kern in een ${}^{96}_{36}$Kr-kern en een ${}^{114}_{46}$Pd-kern.

massa vóór de splijting		**massa na de splijting**	
Pb-atoom	$209,9842\ u$	Kr-atoom	$95,9431\ u$
		Pd-atoom	$113,9104\ u$
totale massa	$209,9842\ u$	totale massa	$209,8535\ u$
Massadefect: $209,9842\ u - 209,8535\ u = 0,1307\ u$			

De energie die vrijkomt bij de splitsing is

$$\begin{aligned} E &= m \cdot c^2 \\ &= 0,1307\ u \cdot \frac{931 MeV}{u} \\ &= 121,7\ MeV \end{aligned}$$

16.4 Natuurlijke radioactiviteit

16.4.1 Soorten straling

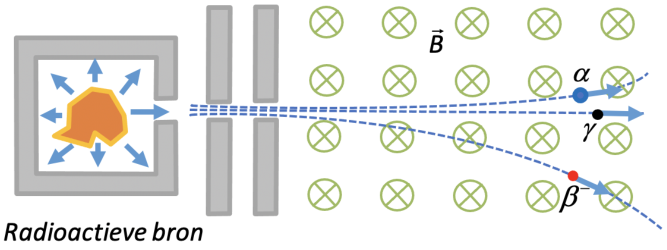
Een niet-stabiele kern die vervalt, zendt straling uit. De Franse natuurkundige Henri Becquerel ontdekte dat toevallig in 1898 tijdens het werken met uraanerts. Verder onderzoek door o.a. Pierre en Marie Curie, Ernest Rutherford en Frederick Soddy leerde dat die straling een sterk **doordringend** vermogen heeft en zelfs op een afgeschermde fotografische plaat zwarting veroorzaakt. Die straling heeft ook een sterk **ioniserend** vermogen: dat betekent dat elektronen uit bv. luchtmoleculen gestoten kunnen worden, waardoor lucht geleidend wordt.

Definitie 16.4.1. Materialen die ioniserende straling uitzenden, noemt men radioactief.

De ioniserende straling van radioactief materiaal noemt men radioactieve straling.

Omdat de ioniserende straling zelf niet radioactief is, vermijden we de term radioactieve straling en gebruiken we eerder de term ioniserende straling.

Door die straling te onderzoeken met elektrische en magnetische velden, heeft men kunnen besluiten dat er drie soorten ioniserende straling bestaan: α, β en γ-straling.



Figuur 95 – Een radioactieve bron straalt verschillende types ioniserende straling uit.

Verder onderzoek leerde:

(a) Ioniserende straling ontstaat als een niet-stabiele nuclide 'vervalt'.

(b) Zo'n nuclide noemt men daarom ook een radionuclide.

(c) Bij radioactief verval verandert de kern van het atoom en ontstaat er een ander atoom: er gebeurt een kernreactie of transmutatie.

16.4.2 α-straling

Bij α-straling wordt een deeltje uit de kern van het atoom gestoten. Dit deeltje bestaat uit twee protonen en twee neutronen: het is dus een ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$-kern en men noemt het een α-deeltje. De snelheid van α-deeltjes ligt tussen 15 000 en 20 000 km/s.

De α-deeltjes hebben een relatief grote massa en lading en veroorzaken daardoor veel ionisaties in materie per cm. Omdat ze zo hun energie snel kwijt geraken is hun doordringingsvermogen erg klein; in een gas zoals lucht is hun dracht slechts enkele cm. In materie in vaste vorm is dit nog veel minder, zodat bv. één blad papier al volstaat om de meeste α - deeltjes tot rust te brengen en de straling zo tegen te houden.

Deze soort straling treedt vooral op bij zwaardere nucliden. Vermits het α-deeltje bestaat uit twee protonen en twee neutronen, daalt het aantal protonen met 2 en het massagetal met 4. Bij α-verval ontstaat dus een ander element!

CC BY-NC-SA 4.0

16.4 Natuurlijke radioactiviteit

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}X + {}^{4}_{2}He$$

Voorbeeld: radium–226 is een α-straler: $^{226}_{88}Ra \rightarrow {}^{222}_{86}Rn + {}^{4}_{2}He$

16.4.3 β- straling

Bij β-straling wordt er een deeltje uit de kern gestoten met de massa van een elektron.

Als dat deeltje negatief is spreken we van β^{-}-verval. Als het deeltje positief is, spreken we van β^{+}-verval. De snelheid van β-deeltjes ligt rond 250 000 km/s.

Door hun kleine massa hebben de β-deeltjes een klein ioniserend vermogen. Daardoor en omwille van hun grote snelheid hebben ze een groot doordringingsvermogen. Om β-straling tegen te houden, heb je bv. een aluminiumplaat nodig met een dikte van enkele mm.

Deze straling treedt zowel bij lichtere als bij zwaardere elementen op.

16.4.3.1 β^{-}-straling

Hoe kan het dat een negatief deeltje uit de kern gestoten wordt, want de kern bestaat toch enkel uit positieve en neutrale deeltjes? Men neemt aan dat in de kern een neutron wordt omgezet in een proton en een elektron:

$$^{1}_{0}n \rightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{0}_{-1}e$$

Dat elektron wordt uit de kern gestoten.

Bij β^{-}-straling blijft het aantal kerndeeltjes gelijk: het aantal protonen neemt met 1 toe en het aantal neutronen neemt met 1 af.

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}X' + {}^{0}_{-1}e$$

Voorbeeld: thorium–234 is een β^{-}-straler: $^{234}_{90}Th \rightarrow {}^{234}_{91}Pa + {}^{0}_{-1}e$

16.4.3.2 β^{+}-straling

Bij β^{+}-straling wordt in de kern een proton omgezet in een neutron en een positief elektron (een positron):

$$^{1}_{1}p \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{0}_{+1}e$$

Dat positron wordt uit de kern gestoten. Een positron is een deeltje met de eigenschappen van een elektron, maar met een positieve lading. Zo'n deeltje met tegengestelde eigenschappen noemt men een antideeltje.

Bij β^{+}-straling blijft het aantal kerndeeltjes gelijk: het aantal protonen daalt met 1 en het aantal neutronen stijgt met 1.

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}X' + {}^{0}_{+1}e$$

Voorbeeld: stikstof–12 is een β^{+}-straler: $^{12}_{7}N \rightarrow {}^{12}_{6}C + {}^{0}_{+1}e$.

16.4.3.3 Elektronvangst

Sommige nucliden vervallen door elektronvangst (EV). Hierbij wordt een elektron van de K-schil door de kern gevangen en met een proton omgezet in een neutron.

$$^{0}_{-1}e + {}^{1}_{1}p \rightarrow {}^{1}_{0}n \qquad \text{en} \qquad {}^{A}_{Z}X + {}^{0}_{-1}e \rightarrow {}^{A}_{Z-1}X'$$

De kern muteert dus zoals bij β^{+}-straling: het aantal kerndeeltjes blijft gelijk, het aantal protonen daalt met 1 en het aantal neutronen stijgt met 1. EV gaat meestal gepaard met X-straling.

Voorbeeld: Argon–37 vervalt door EV: $^{37}_{18}Ar + {}^{0}_{-1}e \rightarrow {}^{37}_{17}Cl$.

CC BY-NC-SA 4.0

16.4 Natuurlijke radioactiviteit

Opmerking 16.4.1. Uit nauwkeurige experimenten bleek dat de wet van behoud van energie niet klopte voor β-verval. In 1930 formuleerde Pauli de hypothese dat er een (nog onbekend) deeltje zou vrijkomen bij β-verval. Dat deeltje zou ongeladen zijn, een zeer kleine massa hebben en bewegen met de lichtsnelheid. Men noemde het een neutrino (= een 'klein neutron'). In 1956 werd het bestaan van dat deeltje experimenteel bevestigd.

16.4.4 γ-straling

Zoals voor de elektronen bestaan er ook voor de kern verschillende energieniveaus. Dikwijls bevindt de kern zich na α- of β-verval nog in een aangeslagen toestand, d.w.z. boven zijn laagste energieniveau (de grondtoestand). Een aangeslagen kern noteren we als X^*. Als de kern vervalt naar de grondtoestand, wordt de overtollige energie uitgestoten als γ-straling. Die straling is van dezelfde aard als licht, radiogolven, IR-straling, microgolven, X-stralen: het zijn stralen van het elektromagnetisch spectrum. Die stralen bestaan uit deeltjes, fotonen genaamd, die bewegen met de lichtsnelheid en elk een pakketje energie vertegenwoordigen. Bij γ-straling bevatten de fotonen heel veel energie.

Omdat γ-straling bestaat uit ongeladen deeltjes met heel veel energie is het ionisatievermogen ervan beperkt en heeft γ-straling een heel groot doordringingsvermogen: om die straling tegen te houden is bv. een muur nodig van enkele meters dik of een loden plaat met een dikte van enkele cm. Vermits bij γ-straling slechts energie uit de kern wordt gestoten, blijven het atoomnummer en het massagetal van de kern hetzelfde.

$$^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X}^* \rightarrow {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X}' + {}^{0}_{0}\gamma$$

Voorbeeld 16.4.1. Na β^--verval van $^{60}_{27}\mathrm{Co}$ ontstaat een aangeslagen $^{60}_{28}\mathrm{Ni}$-kern. Die vervalt naar de grondtoestand door het uitzenden van twee γ-fotonen met resp. $1,17$ MeV en $1,33$ MeV energie.

16.4.5 Behoudswetten

Bij de verschillende vervalvormen is steeds voldaan aan een aantal behoudswetten:

(a) Behoud van **energie en massa**: de som van energie en massa voor het verval is gelijk aan de som van energie en massa na het verval.

(b) Het **aantal kerndeeltjes** voor het verval is gelijk aan het aantal kerndeeltjes na het verval.

(c) De **lading** van het totaal aantal deeltjes voor het verval is gelijk aan de lading van het totaal aantal deeltjes na het verval.

16.4.6 Detectie van ioniserende straling

Ioniserende straling is niet rechtstreeks waar te nemen. Daarom werden verschillende soorten detectoren ontwikkeld om die straling te detecteren of te meten. Die detectie steunt op het principe dat de straling in staat is materie te ioniseren.

De Geiger-Müllerteller werd in 1928 ontworpen door Hans Geiger en Walther Müller. Deze detector bestaat uit een gesloten metalen buis, gevuld met gas, en aan één zijde afgesloten door een dun doorzichtig venster. Wanneer een α- of β- of γ-deeltje door het venster invalt, wordt het gas geïoniseerd. Door de ontstane ionen wordt het gas even geleidend en loopt er even een stroom door het gas. Deze stroom wordt gemeten: de stroom wordt versterkt en gaat naar een teller of een luidspreker. Door zijn eenvoud is dat een van de meest gebruikte en goedkoopste detectoren.

CC BY-NC-SA 4.0

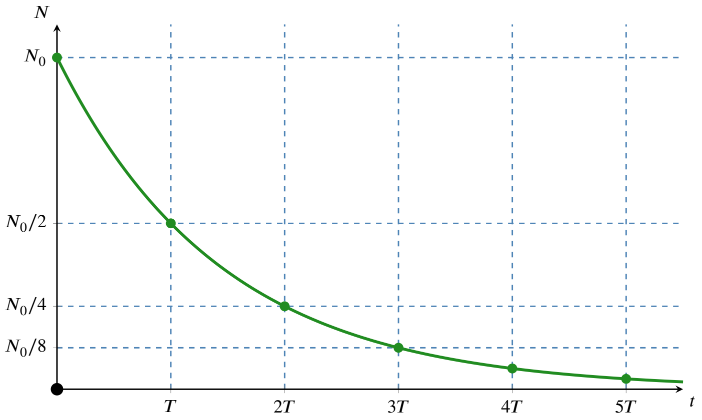
16.4 Natuurlijke radioactiviteit

Figuur 96 – Voorbeeld van een Geiger-Müllerteller voor didactisch gebruik

CC BY-NC-SA 4.0

16.5 De vervalwet

Radioactief verval is een spontaan, maar toevallig proces. Je kunt dus niet voorspellen wanneer één bepaalde kern zal vervallen. Toch geldt ook voor radioactief verval een wetmatigheid. Het gebeurt dus niet willekeurig. Veronderstel dat op het ogenblik t een hoeveelheid materie N niet-stabiele kernen bevat. Vermits deze kernen vervallen, zal N afnemen met de tijd. Experimenteel vind je het volgende verloop:



Figuur 97 – Het radioactief verval van een bron: het aantal nog niet vervallen kernen verloopt volgens een dalende exponentiële functie.

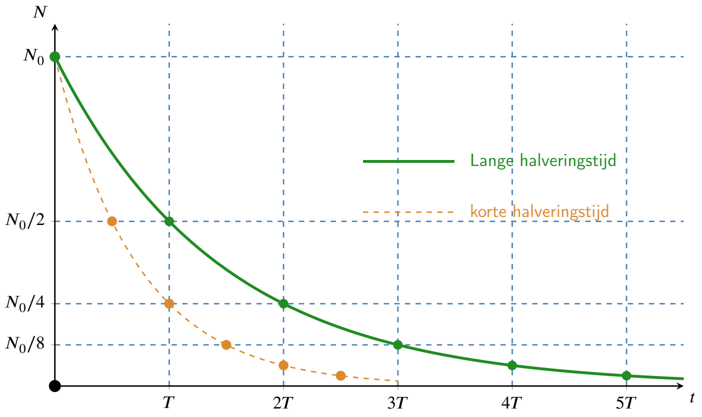
Wat opvalt, is het bestaan van een halveringstijd T: telkens de tijd met T toeneemt, is het aantal kernen gehalveerd.

Definitie 16.5.1. De halveringstijd T is het tijdsverloop waarin de helft van het aantal kernen vervalt.

De halveringstijd verschilt van nuclide tot nuclide.

Voorbeeld 16.5.1.

- voor $\mathrm{B} - 12$ is T gelijk aan $0,020$ s.
- voor $\mathrm{K} - 40$ is T gelijk aan $1,3 \cdot 10^9$ jaar



Figuur 98 – Hoe korter de halveringstijd hoe sterker de exponentiële functie daalt.

CC BY-NC-SA 4.0

16.5 De vervalwet

Hoe minder stabiel een nuclide, hoe sneller die vervalt en hoe korter de halveringstijd.

Zo'n nuclide is dus "kortlevend", maar omdat het verval gebeurt in een korte tijd en bij ieder verval een α- of β^- -deeltje vrijkomt, is een hoeveelheid stof opgebouwd uit zulke nucliden wel erg radioactief! Nucliden met een lange levensduur vervallen traag en zijn dus minder radioactief. Sommige van die nucliden, zoals $\mathrm{Pu}-241$, zijn wel erg giftig! Een lange levensduur is in dat geval geen voordeel!

Eigenschap 16.5.1 (Vervalwet)**.** De functie $N(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{-t}{T}}$ beschrijft het radioactief verval.
De tijd t neemt dezelfde eenheid aan van de halveringstijd T, die je afleest uit een tabel.

Omdat $2 = e^{\ln 2} = e^{0{,}693}$, kan je de vervalwet ook schrijven als

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}693\frac{t}{T}}.$$

De verhouding $\dfrac{0,693}{T}$ noemt men de **desintegratieconstante** λ:

$$\lambda = \frac{0,693}{T}$$

en dus

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$$

Hoe groter de desintegratieconstante λ, hoe sneller de stof vervalt.

Oefening 16.5.1 (Verval van $\mathrm{I}-131$)**.** Het $\mathrm{I}-131$ isotoop dat een halfwaardetijd heeft van 8 dagen wordt gebruikt bij nucleaire geneeskunde. In een kernreactor wordt bijvoorbeeld een sample $\mathrm{I}-131$ gemaakt met $3,0 \cdot 10^{12}$ atomen.

1. Als dit sample 36 uur later wordt afgeleverd in een ziekenhuis, hoeveel atomen $\mathrm{I}-131$ kan je dan nog in het sample aantreffen?

Uitwerking: We gebruiken de vervalfunctie

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{-t}{T}} \text{ met } N_0 = \text{ het aantal kernen in het begin } = 3,0 \cdot 10^{12}$$

$$T = \text{ de halveringstijd } = 8 \text{ dagen } = 192 \text{ uren}$$

Na 36 uren geldt dat

$$N(36\ \mathrm{u}) = 3,0 \cdot 10^{12} \cdot 2^{\frac{-36\mathrm{u}}{192\mathrm{u}}} = 2,6 \cdot 10^{12}.$$

2. Dit sample neemt voortdurend af in sterkte, maar het blijft bruikbaar zolang het aantal $\mathrm{I}-131$ atomen boven de $5,0 \cdot 10^{11}$ blijft. Na hoeveel dagen wordt het sample onbruikbaar?

Uitwerking: De tijd die nodig is om het aantal atomen te herleiden tot $5,0 \cdot 10^{11}$ vinden we dan via

$$5,0 \cdot 10^{11} = 3,0 \cdot 10^{12} \cdot 2^{\frac{-t}{192\mathrm{u}}}.$$

Omrekenen naar t levert dat

$$0,17 = 2^{\frac{-t}{192\mathrm{u}}} \quad \Rightarrow \quad \ln(0,17) = -\frac{t}{192u} \cdot \ln(2)$$
$$\Rightarrow t = 491 \text{ uren} \approx 20 \text{ dagen}$$

Besluit: Na ongeveer 20 dagen wordt het sample onbruikbaar.

CC BY-NC-SA 4.0

Opmerking 16.5.1. In bovenstaande oefening staat u voor de eenheid uur en niet voor unit.

CC BY-NC-SA 4.0

16.6 Activiteit

Telkens een kern in een hoeveelheid radioactief materiaal vervalt, wordt een α- of β-deeltje uitgezonden. Hoe meer kernen per seconde vervallen, hoe meer straling het materiaal dus uitzendt. De grootheid die dat weergeeft, is 'de activiteit'.

Als het aantal kernen op tijdstip t_1 gelijk is aan N_1 en op een later tijdstip t_2 gelijk is aan N_2 is het aantal kernen die vervallen zijn in het tijdsverloop Δt

$$N_1 - N_2 = -\left(N_2 - N_1\right) = -\Delta N.$$

Definitie 16.6.1. De gemiddelde activiteit A_g van een hoeveelheid radioactief materiaal in een tijdsverloop Δt is de verhouding van het aantal kernen die vervallen tot de tijdsduur Δt:

$$A_g = -\frac{\Delta N}{\Delta t}$$

De eenheid van activiteit is 'aantal atomen die vervallen per s' (= aantal desintegraties per s). De eenheid noemt men de becquerel (Bq)

1 Bq = 1 desintegratie/s

Naast de gemiddelde activiteit A_g kunnen we ook de ogenblikkelijke activiteit A beschouwen.

Een ogenblik is een oneindig kort tijdsinterval. Vandaar de definitie:

Definitie 16.6.2. De activiteit A op een ogenblik t is

$$A(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(-\frac{\Delta N}{\Delta t}\right).$$

Men kan aantonen dat dit betekent dat

$$A(t) = 0,693 \cdot \frac{N(t)}{T}.$$

De activiteit hangt af van het aantal kernen en van de halveringstijd. Hoe meer kernen er zijn en hoe korter de halveringstijd, hoe groter de activiteit van het materiaal. Vermits het aantal kernen daalt met de tijd volgens de vervalwet neemt de activiteit van een hoeveelheid radioactief materiaal af met de tijd.

Opmerking 16.6.1. De activiteit is een maat voor de helling van de grafiek van $N(t)$: hoe steiler de grafiek op een bepaald ogenblik, hoe groter de activiteit op dat ogenblik.

Eigenschap 16.6.1. Door de definitie van activiteit te combineren met de definitie van de vervalwet, bekom je een interessante formule die het verband legt tussen de huidige activiteit van een radioactieve stof en de oorspronkelijke activiteit.

$$A(t) = 0,693 \cdot \frac{N(t)}{T} = 0,693 \cdot \frac{N_0 \cdot 2^{\frac{-t}{T}}}{T}$$

$$\Rightarrow A(0) = 0,693 \cdot \frac{N(0)}{T} = 0,693\frac{N_0}{T}$$

$$\Rightarrow A(t) = A(0) \cdot 2^{\frac{-t}{T}}$$

Oefening 16.6.1 (Koolstofdatering)**.** Archeologen die opgravingen doen in een oud jagerskamp hebben op een plaats van een kampvuur een stukje houtskool van 5,0 g ontdekt. De C – 14 activiteit van

CC BY-NC-SA 4.0

16.6 Activiteit

dit stukje bedraagt $0,06$ Bq. Als je mag veronderstellen dat de oorspronkelijke natuurlijke activiteit van het hout $0,23$ Bq bedroeg, hoe oud is het kamp dan ongeveer? (Hint: de halfwaardetijd T van C − 14 is 5730 jaar).

Uitwerking: De activiteit A per gram van koolstof op het ogenblik t dat men het stukje houtskool, wordt gegeven door

$$A(t) = A(0) \cdot 2^{\frac{-t}{T}}.$$

Bij het begin van het afsterven van het organisch materiaal (de houtskool) was

$$A(0) = 0,23 \text{ Bq}.$$

De tijd t waarvoor $A(t) = 0,06$ Bq geeft de ouderdom van het stukje houtskool.

We bekomen de volgende vergelijking:

$$0,06 \text{ Bq} = 0,23 \text{ Bq} \cdot 2^{\frac{-t}{5730j}}.$$

Omrekenen naar t levert ons

$$\frac{0,06}{0,23} = 2^{\frac{-t}{5730j}}.$$

Hieruit volgt dat

$$t = \frac{T}{-\ln(2)} \cdot \ln\left(\frac{0,06}{0,23}\right) = \frac{5730j}{-0,693} \cdot \ln\left(\frac{0,06}{0,23}\right) = 11 \cdot 10^3 j.$$

Je vindt dan $t = 11 \cdot 10^3$ jaar.

Op het moment van de vondst was het stukje houtskool ongeveer 11 000 jaar oud.

CC BY-NC-SA 4.0

16.7 Dosis en dosisequivalent

16.7.1 De opgenomen dosis

Radioactieve straling is slechts schadelijk als ze door het lichaam wordt opgenomen.

Definitie 16.7.1. De ontvangen dosis of kortweg de dosis D is de verhouding van de hoeveelheid opgenomen stralingsenergie E tot de massa m die die straling opneemt:

$$D = \frac{E}{m}.$$

De eenheid hiervan is de gray (Gy):

1 Gy = 1 J/kg

1 Gy is een heel grote waarde.

Een dosis gammastraling van 3 Gy (= 3 J/kg) die in één keer door het lichaam wordt opgenomen heeft in 50 % van de gevallen na enkele weken de dood tot gevolg.

Bij bestraling van tumoren is plaatselijk een dosis van 60 Gy of meer nodig.

16.7.2 Het dosisequivalent

De schade die 1 Gy geabsorbeerde dosis aan het lichaam toebrengt, is niet altijd gelijk. Dat hangt af van de tijd waarin die dosis wordt opgenomen, het soort geabsorbeerde straling en de gevoeligheid van het bestraalde orgaan of weefsel.

α-straling die wordt opgenomen, veroorzaakt ongeveer 20 maal meer schade dan eenzelfde dosis β- of γ-straling. Daarom definieert men de RBE-factor (het Relatief Biologisch Effect): voor α-straling is RBE dan bijvoorbeeld gelijk aan 20 terwijl voor eenzelfde weefsel voor β- of γ-straling RBE = 1.

De RBE-factor heeft geen eenheid.

Definitie 16.7.2. Het dosisequivalent H is het product van de opgenomen dosis D en het relatief biologisch effect (RBE):

$$H = D \cdot RBE = \frac{E \cdot RBE}{m}.$$

De eenheid van het dosisequivalent is de sievert (Sv).

1 Sv = 1 J/kg

Het dosisequivalent H wordt dus, net zoals de dosis D, uitgedrukt in J/kg. Omdat het twee verschillende grootheden zijn, geeft men de eenheden ervan een verschillende naam.

1 Sv is een grote waarde: het gemiddelde dosisequivalent dat de bewoners in België jaarlijks ontvangen, bedraagt ongeveer $2,5$ mSv. Voor werknemers in de nucleaire sector mag het dosisequivalent maximaal 20 mSv per jaar bedragen.

CC BY-NC-SA 4.0

16.8 Oefeningen Kernfysica

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

A) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

B) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

C) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

16.8.A Instapoefeningen

Oefening 16.8.1. Beschouw de volgende nucliden: $^{16}_{8}\mathrm{O}$, $^{18}_{9}\mathrm{F}$ en $^{18}_{10}\mathrm{Ne}$. Welke hebben hetzelfde massagetal? Welke hebben hetzelfde aantal neutronen?

Uitwerking: $^{18}_{9}\mathrm{F}$ en $^{18}_{10}\mathrm{Ne}$ hebben hetzelfde massagetal, d.w.z. hetzelfde totaal aantal neutronen en protonen samen. Dit is immers het getal linksboven.

$^{16}_{8}\mathrm{O}$ en $^{18}_{10}\mathrm{Ne}$ hebben hetzelfde aantal neutronen: Het massagetal is de som van het aantal neutronen en protonen, waaruit volgt dat het aantal neutronen gegeven wordt door het aantal protonen (linksonder) van het massagetal (linksboven) af te trekken. Voor zuurstof (O) en Neon (Ne) is dit dus in beide gevallen gelijk aan 8, terwijl dit voor Fluor (F) gelijk is aan 9.

Oefening 16.8.2. De drie isotopen $^{238}_{92}\mathrm{U}$, $^{137}_{55}\mathrm{Cs}$ en $^{218}_{84}\mathrm{Po}$ vervallen als

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + \alpha,$$

$$^{137}_{55}\mathrm{Cs} \rightarrow {}^{137}_{56}\mathrm{Ba} + \beta^- + \gamma,$$

en

$$^{218}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{218}_{85}\mathrm{At} + \beta^-.$$

Welke van deze isotopen zou je in biologisch onderzoek als tracer kunnen gebruiken? Waarom?

$^{137}_{55}\mathrm{Cs}$✓

Uitwerking: Dit is omdat hier een foton uitgestuurd wordt (het γ-deeltje). Dit dringt makkelijk door materiaal als weefsel heen, in tegenstelling tot α- en β-deeltjes. Bijgevolg kunnen deze eenvoudiger gedetecteerd worden.

Oefening 16.8.3. Ga voor elk van de onderstaande vervalwijzen na welke het onbekende isotoop X is:

1.

$$X \rightarrow {}^{224}_{88}\mathrm{Ra} + \alpha$$

Uitwerking: $^{228}_{90}\mathrm{Th}$. Een α-deeltje bestaat uit 2 protonen en 2 neutronen, en het oorspronkelijke isotoop moet deze dus hebben, bovenop de nucleonen die in Radon-224 zitten. We hebben dus 2 extra protonen nodig, wat ons al bij Thorium brengt, en het massagetal moet met 4 omhoog (2 protonen + 2 neutronen), wat het massagetal dus op 228 brengt.

2.

$$X \rightarrow {}^{206}_{82}\mathrm{Pb} + \beta^-$$

Uitwerking: $^{206}_{81}\mathrm{Tl}$. Negatief β-verval zendt een elektron en antineutrino uit, terwijl een neutron een proton wordt in de kern. We hebben dus het element nodig dat een proton minder heeft dan lood (82 protonen). Dit is Thallium, met 81 protonen. Bij β-verval verandert het massagetal niet, aangezien enkel een elektron en antineutrino worden uitgezonden.

3.

$$X \rightarrow {}^{60}_{28}\mathrm{Ni} + \gamma$$

Uitwerking: $^{60}_{28}\mathrm{Ni}$. Bij γ-straling verandert het chemisch element niet, en het massagetal ook niet. Er wordt enkel een foton uitgezonden.

CC BY-NC-SA 4.0

16.8.B Standaardoefeningen

Oefening 16.8.4. De radionuclide $^{215}_{83}\mathrm{Bi}$ vervalt achtereenvolgens door het uitsturen van twee β^-deeltjes, één α-deeltje en één γ-deeltje. Welke kern blijft dan over?

Meerkeuze:

(a) $^{209}_{79}\mathrm{Au}$

(b) $^{211}_{82}\mathrm{Pb}$

(c) $^{211}_{83}\mathrm{Bi}$ ✓

(d) $^{215}_{84}\mathrm{Po}$

Uitwerking: Bij β^-verval wordt een neutron omgevormd in een proton. Het massagetal blijft dus gelijk, maar het atoomnummer stijgt met 1. Dus na het uitzenden van twee β^-deeltjes is A nog steeds 215, maar Z=85.

Bij α-verval vermindert het massagetal met 4 en het atoomnummer met twee. Daardoor wordt A=211 en Z=83. Gammastraling heeft geen invloed op het massagetal of het atoomnummer. Daarom is de resulterende kern $^{211}_{83}\mathrm{Bi}$.

Oefening 16.8.5. Een $^{222}_{86}\mathrm{Rn}$-kern vervalt naar een $^{210}_{82}\mathrm{Pb}$ kern. Dit kan door

Meerkeuze:

(a) 6 α-vervallen en 0 β^--vervallen

(b) 6 α-vervallen en 4 β^--vervallen

(c) 3 α-vervallen en 2 β^--vervallen ✓

(d) 3 α-vervallen en 4 β^+-vervallen

Uitwerking: Bij het verval van $^{222}_{86}\mathrm{Rn}$ naar $^{210}_{82}\mathrm{Pb}$ verandert het massagetal van A=222 naar A=210. Dat is te realiseren met 3 α-vervallen omdat bij elk α-verval het massagetal vermindert met 4.

Bij drie α-vervallen vermindert het atoommnummer met 6, dus tot Z=80, omdat bij elk α-verval het atoomnummer vermindert met 2.

Na 2 β^--vervallen stijgt het atoomnummer met 2 tot Z=82, maar het massagetal blijft onveranderd.

Oefening 16.8.6. Hoe groot is de energie (uitgedrukt in MeV) die vrijkomt bij het alfa-verval van $^{233}_{92}\mathrm{U}$?

$$E = 4.91\ \mathrm{MeV}$$

Uitwerking: De energie die vrijkomt bij het alfa-verval van Uranium-233 is afkomstig van het massaverschil Δm tussen Uranium en zijn vervalproducten (alfa-deeltje en Thorium-229). Dit massaverschil komt dan overeen met een energie $E = \Delta mc^2$. Het massaverschil berekenen we als

$$\begin{aligned}\Delta m &= m(^{233}\mathrm{U}) - \mathrm{m}(\alpha) - \mathrm{m}(^{229}\mathrm{Th})\\ &= 233,03963\ \mathrm{u} - 4,00260\ \mathrm{u} - 229.03176\ \mathrm{u}\\ &= 0.00527\ \mathrm{u}\end{aligned}$$

Als we dan gebruiken dat $c^2 = 931\,\mathrm{MeV/u}$, vinden we dat $E = 931 \cdot 0,00527\,\mathrm{MeV} = 4,91\,\mathrm{MeV}$.

Oefening 16.8.7. Het barium isotoop $^{131}_{56}\mathrm{Ba}$ heeft een halfwaardetijd van 12 dagen. Je beschikt over

CC BY-NC-SA 4.0

16.8.B Standaardoefeningen

een sample van 250 μg. Wat is de massa $^{131}_{56}$Ba na 10 dagen?

$$m = 140\ \mu\text{g}$$

Uitwerking: We gebruiken de vervalwet, die zegt dat het aantal deeltjes exponentieel vervalt. Aangezien het sample volledig uit barium bestaat, geldt dit ook voor de massa barium, en wel met dezelfde halfwaardetijd. We vinden dus dat

$$m(t) = m_0\, 2^{-t/T}\,,$$

met $m(t)$ de massa op tijdstip t, m_0 de beginmassa en T de halfwaardetijd in dagen. We vinden dus na 10 dagen:

$$m(10) = 250\ \mu\text{g} \cdot 2^{-10/12} \approx 140\ \mu\text{g}\,.$$

Oefening 16.8.8. Het Cobalt isotoop $^{60}_{27}$Co heeft een halfwaardetijd van $5,27$ jaar. Je beschikt over een sample $^{60}_{27}$Co met een activiteit van $3,50 \cdot 10^9$ Bq. Wat is de massa van dit sample?

$$m = 83.6\ \mu\text{g}$$

Uitwerking: We gebruiken dat de activiteit gegeven wordt door

$$A(t) = 0,693\frac{N(t)}{T}\,,$$

waarbij de halfwaardetijd in seconden is als we de activiteit uitdrukken in Becquerel. We berekenen eerst dat 5,27 jaar gelijk is aan 1,663$\cdot 10^8$ s. Dan vinden we met de formule dat $N = 8,4 \cdot 10^{17}$. Nu hebben we dus de massa van 1 Cobalt nuclide nodig: We vinden deze als $m_1 = 59,934 \cdot 1,661 \cdot 10^{-27}$ kg. Dan vinden we de totale massa als $m = N \cdot m_1 = 83,6\,\mu$g.

CC BY-NC-SA 4.0

16.8.C Gevorderde oefeningen

Oefening 16.8.9. De radionuclide ^{55}Co heeft een activiteit die 4,0 % per uur afneemt. Het vervalproduct is stabiel. Wat is de halfwaardetijd van ^{55}Co, uitgedrukt in uur?

De halfwaardetijd is: 17 uur

Uitwerking: Voor het verloop van de activiteit geldt dat $A(t) = A(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$. Wanneer $t = 1$ h geldt dan dat $A(1) = A(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}}$.

Er is gegeven dat de afname van de activiteit 4,0 % per uur bedraagt. Dus moet

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}} = 0,96$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{T} \cdot \ln(0,50) = \ln(0,96)$$
$$\Leftrightarrow T = 17 \text{ h}$$

De halfwaardetijd van ^{55}Co is 17 h

Oefening 16.8.10. Bepaal de ouderdom van de lijkwade van Turijn als je weet dat momenteel de hoeveelheid C-14 in de stof van de lijkwade 92 % bedraagt van wat je in levende materie zou aantreffen. Er is gegeven dat de halveringstijd van C-14 gelijk is aan $T = 5730$ j.

De ouderdom van de lijkwade is: 689 jaar

Uitwerking: We gebruiken de vervalwet $N(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{-t}{T}}$ waaruit volgt dat .

$$\frac{N(t)}{N_0} = 2^{\frac{-t}{T}}$$

Er is gegeven dat $\frac{N(t)}{N_0} = 0,92$, bijgevolg geldt dat

$$2^{\frac{-t}{T}} = 0,92$$

Hieruit kunnen we t bepalen.

$$\ln\left(2^{\frac{-t}{T}}\right) = \ln(0,92)$$
$$\Leftrightarrow \frac{-t}{T} \cdot \ln(2) = \ln(0,92)$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{-\ln(0,92)}{\ln(2)} \cdot T$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{-\ln(0,92)}{\ln(2)} \cdot 5730\,\text{j} = 689\,\text{j}$$

De ouderdom van de lijkwade is ongeveer 689 jaar. De herkomst van de lijkwade kan dus gesitueerd worden rond het begin van de veertiende eeuw.

CC BY-NC-SA 4.0

16.8.D Oefeningen Usolv-it

Oefening 16.8.11. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over inleidende begrippen uit de kernfysica via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

17.1 Intro thermodynamica

In dit hoofdstuk bespreken we de macroscopische eigenschap temperatuur en voeren de absolute of thermodynamische temperatuurschaal in. Vervolgens bekijken we de macroscopische eigenschappen van gassen met zeer lage dichtheid om zo tot de ideale gaswet te komen. Tot slot komt het verband tussen warmte en temperatuur aan bod. Welke fysische effecten zien we als een systeem wordt opgewarmd? De opgenomen warmte zorgt voor een temperatuursverhoging van het systeem met behoud van de aggregatietoestand of voor een verandering van aggregatietoestand.

CC BY-NC-SA 4.0

17.2 Temperatuur en warmte

In het dagelijkse leven zegt men soms dat de temperatuur van een voorwerp een maat is voor hoe warm of koud het voorwerp is. Omdat warm en koud subjectieve begrippen zijn, hanteren we in de natuurkunde een meer nauwkeurige definitie.

Definitie 17.2.1. De temperatuur van een object is een maat voor de gemiddelde microscopische snelheid van de deeltjes in dat object.

Bij een hogere temperatuur zullen de moleculen van een hoeveelheid stof gemiddeld sneller bewegen. Deze hogere microscopische snelheid leidt dan tot een toename van de kinetische energie van de deeltjes. M.a.w de temperatuur is ook een maat voor de microscopische kinetische energie van de deeltjes, en omgekeerd. Als twee voorwerpen zich op dezelfde temperatuur bevinden, hebben hun deeltjes dezelfde gemiddelde microscopische kinetische energie.

Wanneer je twee objecten op een verschillende temperatuur in thermisch contact brengt met elkaar zullen ze beide naar een evenwichtstemperatuur evolueren. Tijdens dit proces stroomt **warmte** van het object op hoge temperatuur naar het object op lage temperatuur.

Definitie 17.2.2. Warmte is een overdracht van energie van het ene naar het andere voorwerp ten gevolge van een verschil in temperatuur. De warmte stroomt van het voorwerp op hoge naar het voorwerp op lage temperatuur, tot de temperaturen aan elkaar gelijk zijn geworden. Het symbool voor een hoeveelheid warmte is Q en de eenheid waarin ze wordt uitgedrukt is joule (J).

Opmerking 17.2.1. Let op want het symbool Q wordt ook gebruikt voor de grootheid elektrische lading.

Twee systemen zijn in **thermisch evenwicht** als deze energieuitwisseling ophoudt. We zullen het begrip temperatuur gebruiken om thermisch evenwicht tussen twee voorwerpen die energie kunnen uitwisselen, vast te leggen: twee voorwerpen met dezelfde temperatuur zijn in thermisch evenwicht.

Temperatuursveranderingen kunnen bijvoorbeeld gemeten worden met vloeistofthermometers. Stijgt de temperatuur rondom de thermometer, dan zal de vloeistofkolom langer worden, en omgekeerd.

Om de temperatuur op te meten zijn verschillende **temperatuurschalen** mogelijk:

(a) Kelvinschaal of absolute temperatuurschaal: het nulpunt van deze schaal valt samen met het absolute nulpunt van temperatuur. De absolute temperatuur wordt genoteerd met T en wordt aangegeven in kelvin (K).

(b) Celsiusschaal: het nulpunt van deze schaal valt samen met het vriespunt van water. Het kookpunt van water valt samen met 100 °C. De temperatuur wordt genoteerd met θ en wordt aangegeven in graden celsius (°C). Het absolute nulpunt stemt overeen met $-273,15$ °C. De intervallen zijn hetzelfde als bij de Kelvinschaal, waaruit volgt dat $T(\mathrm{K}) = \theta(°\mathrm{C}) + 273,15$.

(c) Fahrenheitschaal: het vriespunt van water wordt gedefinieerd als 32 °F en het kookpunt wordt bereikt bij 212 °F.

CC BY-NC-SA 4.0

17.3 Gaswetten

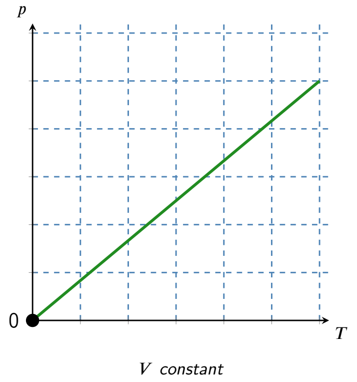
We kunnen met gassen verschillende experimenten uitvoeren. Naargelang de omstandigheden van het experiment (constant volume, of constante temperatuur, of constante druk) kunnen we uit de experimentele resultaten andere wetten afleiden.

Opmerking 17.3.1. Let op, alle gaswetten werken met de absolute temperatuur T die in Kelvin wordt uitgedrukt !

Definitie 17.3.1. Een thermodynamisch proces waarbij het volume constant wordt gehouden, noemen we een **isochoor** proces.

Voor een gegeven hoeveelheid gas met lage dichtheid dat opgesloten zit in een afgesloten ruimte zal de temperatuur van het gas evenredig zijn met de druk van het gas *bij een constant volume*. Deze wetmatigheid is gekend als de wet van Gay-Lussac:

$$p \sim T \qquad \text{of} \qquad \frac{p}{T} = \text{constant}$$

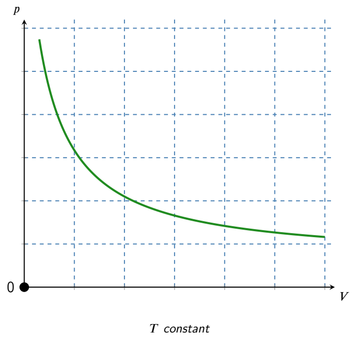


Figuur 99 – (p,T)-diagramma voor een opgesloten ideaal gas bij constant volume.

Definitie 17.3.2. Een thermodynamisch proces waarbij de temperatuur constant wordt gehouden, noemen we een **isotherm** proces.

De wet van Boyle-Mariotte beschrijft het gedrag van ideale gassen *bij constante temperatuur*:

$$p \sim \frac{1}{V} \qquad \text{of} \qquad p \cdot V = \text{constant}$$



Figuur 100 – (p,V)-diagramma voor een opgesloten ideaal gas bij constante temperatuur.

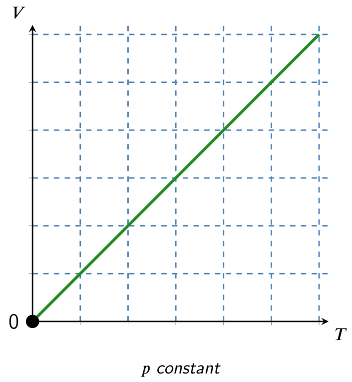
CC BY-NC-SA 4.0

17.3 Gaswetten

Definitie 17.3.3. Een thermodynamisch proces waarbij de druk constant wordt gehouden, noemen we een **isobaar** proces.

De wet van Charles beschrijft het gedrag van ideale gassen *bij constante druk*:

$$V \sim T \qquad \text{of} \qquad \frac{V}{T} = \text{constant}$$



Figuur 101 – (V,T)-diagramma voor een opgesloten ideaal gas bij constante druk.

17.3.1 Algemene of 'ideale' gaswet

We kunnen de wet van Gay-Lussac, de wet van Boyle-Mariotte en de wet van Charles samenvatten in één **algemene gaswet** waarbij nu in principe geen grootheid meer constant moet worden gehouden:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

met n het aantal mol van het opgesloten gas en $R = 8,314 \frac{J}{mol \cdot K}$ de universele gasconstante.

Deze wet is in principe enkel geldig voor zogenaamd **ideale gassen**, waarvan je gasdeeltjes als punten kan voorstellen die zo ver van elkaar zitten dat ze elkaar niet beïnvloeden. In de praktijk geldt deze wet voor sterk verdunde reële gassen.

17.3.2 Wet van Dalton

Wanneer een gas met druk p_1 en een gas met druk p_2 gemengd worden in een volume gelijk aan de som van beide volumes, en dit bij dezelfde omgevingstemperatuur, wat is dan de waarde van de einddruk van het gemengde gas?

(a) Als de afzonderlijke drukken p_1 en p_2 van beide gassen voor de menging gelijk zijn dan zal de einddruk $p_e = p_1 = p_2$.

(b) Stel nu dat de twee afzonderlijke drukken niet aan elkaar gelijk zijn: $p_1 \neq p_2$. In de eerste gasfles bevinden zich n_1 mol moleculen in een volume V_1. Ze oefenen een druk p_1 uit. De tweede gasfles bevat n_2 mol moleculen in een volume V_2, zij oefenen een druk p_2 uit. De temperatuur is gelijk voor beide gassen. Wanneer de twee gasflessen met elkaar verbonden worden, ontstaat er een nieuw gasvolume V met n mol moleculen die een druk p uitoefenen. Hiervoor geldt dat $n = n_1 + n_2$ en $V = V_1 + V_2$. De druk p kan berekend worden m.b.v. de ideale gaswet:

$$p = \frac{R \cdot n \cdot T}{V} = \frac{R \cdot (n_1 + n_2) \cdot T}{V_1 + V_2}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

Dit kan herwerkt worden als:

$$\begin{aligned} p &= \frac{R \cdot n_1 \cdot T}{V_1 + V_2} + \frac{R \cdot n_2 \cdot T}{V_1 + V_2} \\ &= p_1' + p_2' \end{aligned}$$

Hierbij worden p_1' en p_2' de partieeldrukken genoemd:

(a) p_1' is de druk die de eerste gashoeveelheid met n_1 mol deeltjes uitoefent als die zich alleen in het volume $V_1 + V_2$ zou bevinden;

(b) p_2' is de druk die de tweede gashoeveelheid met n_2 mol deeltjes uitoefent als die zich alleen in het volume $V_1 + V_2$ zou bevinden.

Passen we nu de gaswet van Boyle toe, dan vinden we dat:

$$p_1 \cdot V_1 = p_1' \cdot (V_1 + V_2) \qquad \text{en} \qquad p_2 \cdot V_2 = p_2' \cdot (V_1 + V_2)\,.$$

Hieruit volgt dat

$$p_1' = \frac{p_1 \cdot V_1}{V_1 + V_2} \qquad \text{en} \qquad p_2' = \frac{p_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2}.$$

Omdat de einddruk gelijk is aan de som van de partieeldrukken volgt dat:

$$p = p_1' + p_2' = \frac{p_1 \cdot V_1 + p_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2}.$$

Deze laatste uitdrukking staat bekend als de **wet van Dalton**.

CC BY-NC-SA 4.0

17.4 Warmte

Wanneer een systeem warmte opneemt uit een ander (warmer) systeem, kan deze instromende warmte zorgen voor een temperatuursverhoging van het systeem met behoud van de aggregatietoestand, of voor een verandering van aggregatietoestand.

17.4.1 Warmteuitwisseling bij een temperatuursverandering

Wanneer een systeem warmte opneemt en daarbij niet van aggregatietoestand verandert, zal de warmteopname aanleiding geven tot een temperatuursstijging van het systeem. Als Q de opgenomen warmte is en ΔT de resulterende temperatuursstijging, dan is

$$Q = C \cdot \Delta T.$$

Deze vergelijking kan ook worden gebruikt bij het geval van warmte-afgave van het systeem aan een ander (kouder) systeem. In dat geval rekenen we Q negatief, en volgt hieruit dat de temperatuur van het systeem afneemt.

Hierin is C is de **warmtecapaciteit** van het systeem: deze geeft de warmte weer die opgenomen of afgegeven wordt door het systeem per eenheid van temperatuurverandering. De S.I.-eenheid van warmtecapaciteit is J/K. Om bijvoorbeeld de temperatuur van een systeem met warmteacapaciteit van 150 J/K te laten toenemen met 1 K is 150 J nodig.

De warmtecapaciteit van een systeem hangt af van het soort materiaal en de massa van (eventueel de verschillende onderdelen van) het systeem. Hoe groter de hoeveelheid materie, hoe meer warmte moet onttrokken of toegevoegd worden om een bepaalde temperatuursverandering ΔT te realiseren. De hoeveelheid stof wordt bepaald door de massa m of door het aantal mol n te specifiëren.

Voor een systeem dat bestaat uit één soort stof kunnen we de warmtecapaciteit C schrijven als

$$C = m \cdot c$$

waarbij c de **soortelijke warmte** van het materiaal is, met S.I.-eenheid $\dfrac{J}{kg \cdot K}$ en m de massa van het systeem; of als

$$C = n \cdot C_m$$

waarbij C_m de **molaire warmtecapaciteit** van het materiaal is, met S.I.-eenheid $\dfrac{J}{mol \cdot K}$, en n de molhoeveelheid van het systeem.

> **Opmerking 17.4.1.** Omdat $\Delta T = \Delta\theta$ kan je ook schrijven dat $Q = C \cdot \Delta\theta$ en kan de soortelijke warmte c ook uitgedrukt worden in $\dfrac{J}{kg \cdot °C}$ en de molaire warmtecapaciteit ook in $\dfrac{J}{mol \cdot °C}$.

Als we twee voorwerpen A en B die een verschillende temperatuur hebben, in thermisch contact met elkaar brengen, zodat ze warmte kunnen uitwisselen, dan veronderstellen we dat het geheel géén warmte met de omgeving uitwisselt. De warmte die door het systeem A met de hoge temeperatuur wordt afgegeven, wordt volledig door het systeem B met de lage temperatuur opgenomen, zonder verlies. Dit principe noemen we ook wel de **warmtebalans** :

$$Q_{afgegeven,A} = -Q_{opgenomen,B}$$

> **Opmerking 17.4.2.** Let op het minteken, dat nodig is omdat we de opgenomen warmte positief definiëren, en de afgegeven warmte negatief.

> **Voorbeeld 17.4.1.** Beschouw een bad dat gevuld is met 90 ℓ water dat een temperatuur heeft van 20 °C. Hoeveel liter water van 80 °C moet ik toevoegen om een eindtemperatuur te realiseren van $\theta_e = 38\ °C$ ($C_{\text{bad}} = 30\dfrac{kJ}{°C}$; $C_{water} = 4186\dfrac{J}{kg \cdot °C}$)?

CC BY-NC-SA 4.0

Uitwerking: We maken gebruik van de warmtebalans en het feit dat het toevoegen van warm water de temperatuur van het water in het bad zal doen stijgen:

$$
\begin{aligned}
Q_{\text{opgenomen}} + Q_{\text{afgegeven}} &= 0 \\
C_{\text{bad}} \cdot (\theta_e - \theta_i) + C_{\text{water}} \cdot m \cdot (\theta_e - \theta_i) + C_{\text{water}} \cdot m_{\text{toegevoegd}} \cdot (\theta_e - \theta_{\text{toegevoegd},i}) &= 0 \\
C_{\text{bad}} \cdot (\theta_e - \theta_i) + C_{\text{water}} \cdot \rho_{\text{water}} \cdot V_{\text{bad}} \cdot (\theta_e - \theta_i) + C_{\text{water}} \cdot \rho_{\text{water}} \cdot V_{\text{toegevoegd}} \cdot (\theta_e - \theta_{\text{toegevoegd},i}) &= 0 \\
\frac{\left[C_{\text{bad}} + C_{\text{water}} \cdot \rho_{\text{water}} \cdot V_{\text{bad}}\right] \cdot (\theta_e - \theta_i)}{-C_{\text{water}} \cdot \rho_{\text{water}} \cdot (\theta_e - \theta_{\text{toegevoegd},i})} &= V_{\text{toegevoegd}} \\
\frac{\left[30 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{^\circ\text{C}} + 4186 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 90 \cdot 10^{-3} m^3\right] \cdot (38^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})}{-4186 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (38^\circ\text{C} - 80^\circ\text{C})} &= V_{\text{toegevoegd}} \\
0,0416 \text{ m}^3 &= V_{\text{toegevoegd}}
\end{aligned}
$$

Er moet dus 41,6 liter warm water aan het bad toegevoegd worden.

17.4.2 Warmteuitwisseling bij een verandering van aggregatietoestand

Bij de bespreking van de mogelijke aggregatietoestanden van een materiaal maakt men vaak een onderscheid tussen vast, vloeibaar en gas. Bij de overgang van de ene aggregatietoestand naar de andere wordt de uitgewisselde warmte gebruikt om deze toestandsverandering te realiseren. **De temperatuur blijft hierbij constant.**

Bekijken we eerst de overgang van de vloeibare naar de gasfase, **verdamping** genomed. De warmte L_V nodig om vloeistofmoleculen naar de gasfase te brengen is evenredig met de massa vloeistof m die verdampt en hangt af van het soort vloeistof die verdampt. Deze warmte noemen we de verdampingswarmte:

$$L_V = \ell_v \cdot m.$$

Hierin is ℓ_v de soortelijke verdampingswarmte van de stof, die uitgedrukt wordt in $\frac{J}{kg}$.

Het omgekeerde proces van de damp- naar de vloeibare fase wordt **condensatie** genoemd. Bij het omzetten van damp naar vloeistof geeft het systeem warmte af aan de omgeving.

De overgangen tussen de vaste - naar de vloeibare fase (**smelt- en stolproces**) gebeuren op gelijkaardige manier. Bij een gegeven druk zal de opgenomen warmte leiden tot een temperatuurstijging van de vaste stof totdat de smelttemperatuur is bereikt. Dan begint de vaste stof te smelten en bestaan de vloeibare - en vaste fase samen. Het verder toevoegen van warmte dient enkel om de toestandsverandering te realiseren en niet om de temperatuur te veranderen. Wanneer de vaste stof volledig gesmolten is, zal extra toegevoegde warmte de temperatuur van de vloeistof doen stijgen.

De smeltwarmte L_s die nodig is om een vaste stof te smelten is evenredig met de massa m van deze vaste stof en van de soortelijke smeltwarmte ℓ_s van het materiaal. Er geldt dan dat:

$$L_s = \ell_s \cdot m.$$

Bij stollen geeft het systeem warmte af aan de omgeving.

De laatste overgang is deze van de vaste - naar de gasfase (**sublimatie** genaamd) of omgekeerd. Bij een gegeven druk gebeuren deze overgangen bij een bepaalde temperatuur, de sublimatietemperatuur. L_{subl} is de sublimatiewarmte om een vaste stof met massa m te sublimeren en wordt mee bepaald door de soortelijke sublimatiewarmte ℓ_{subl}:

$$L_{subl} = \ell_{subl} \cdot m.$$

17.4.3 Fasediagram van een stof

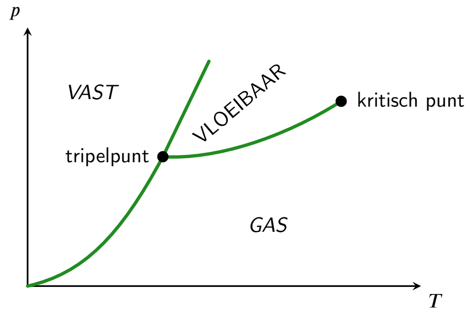
Als we werken met een stof bij constant volume V, kunnen we een (p,T)-diagramma opstellen waarin we de verschillende gebieden onderscheiden die met een bepaalde aggregatietoestand overeenstemmen : gasvormig, vloeibaar, vast. We noemen dit (p,T)-diagramma dan een **fasediagram**.

CC BY-NC-SA 4.0

Bij de grenslijnen tussen deze gebieden kunnen fase-overgangen optreden als het systeem warmte opneemt of afgeeft. We noemen deze lijnen de smeltlijn, kooklijn, en sublimatielijn.

Als we deze grenslijnen in figuur 102 bekijken, zien we dat, bij constant volume, bijvoorbeeld de smelttemperatuur afhangt van de druk : de smelttemperatuur verhoogt bij hogere drukken.

Bovendien zien we dat de drie grenslijnen snijden in één punt. We noemen dit punt het **tripelpunt** van die stof. In dit punt zijn de drie aggregatietoestanten van de stof alledrie in thermisch evenwicht: ze kunnen er dus samen bestaan.



Figuur 102 – fasediagram met smeltlijn, dampspanningslijn en sublimatielijn voor een stof verschillend van water.

CC BY-NC-SA 4.0

17.5 Oefeningen Thermodynamica

De oefeningen zijn opgesplitst in 3 niveaus:

A) de **Instapoefeningen** zijn eenvoudige toepassingen van de theorie, en je kent dit hoofdstuk nog onvoldoende zolang je deze oefeningen niet *erg vlot* kan oplossen.

B) de **Standaardoefeningen** combineren soms meerdere concepten, of vragen wat meer denk- of rekenwerk. Mits voldoende inspanning en tijd kan je ze wel allemaal oplossen.

C) de **Gevorderde oefeningen** zijn meestal wat uitdagender, en er is wat creativiteit of doorzettingsvermogen nodig om ze op te lossen. Het is geen drama als je sommige van die oefeningen (nog) niet zelf kan oplossen.

CC BY-NC-SA 4.0

17.5.A Instapoefeningen

Oefening 17.5.1. Bepaal het volume van een hoeveelheid gas bij 67°C als het volume bij 21°C 150 cm^3 bedraagt. Tijdens de temperatuursverandering blijft de druk constant.

$$V = 173 \text{ cm}^3$$

Uitwerking: Uit de wet van Charles die stelt dat $\frac{V}{T} = \text{constant}$, volgt

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow V_2 = \frac{V_1 \cdot T_2}{T_1}$$

De temperatuur moet uitgedrukt worden in kelvin, dus bekomen we

$$V_2 = \frac{150 \text{ cm}^3 \cdot (67 + 273) \text{ K}}{(21 + 273) \text{ K}} = 173 \text{ cm}^3$$

Door de toename van de temperatuur bij constante druk is het volume uitgezet tot 173 cm^3

Oefening 17.5.2. Een afgesloten meetspuit bevat lucht en is ingesteld op een volume van $2,0\ \ell$. We trekken aan de zuiger van de spuit en houden de temperatuur constant. De druk neemt hierdoor af en zakt tot één vierde van de oorspronkelijke waarde. Tot welk volume is de spuit uitgetrokken?

$$V = 8,0\ \ell$$

Uitwerking: Uit de wet van Boyle-Mariotte die stelt dat $p \cdot V = \text{constant}$, volgt

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{p_2}$$

Voor de druk in het gas nadat de spuit is uitgetrokken, geldt dat $p_2 = \frac{p_1}{4}$. Bijgevolg bekomen we dat

$$V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{\frac{p_1}{4}} = 4 \cdot V_1 = 4 \cdot 2,0\ \ell = 8,0\ \ell$$

Omdat de temperatuur constant bleef tijdens het uittrekken van de meetspuit en de druk vier keer kleiner werd, kunnen we besluiten dat het volume vier keer groter is geworden.

Oefening 17.5.3. $3,0$ mol van een gas op een temperatuur van -120°C vult een fles met een volume van $2,0$ liter. Hoe groot is de druk van het gas?

$$P = 1.9 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Uitwerking: Uit de ideale gaswet $pV = nRT$ volgt dat de druk van een gas gegeven wordt door

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{(3.0 \text{ mol})(8,31 \text{ J/molK})[(273 - 120) \text{ K}]}{(2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3)} = 1,9 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

CC BY-NC-SA 4.0

17.5.A Instapoefeningen

Oefening 17.5.4. Hoe groot is de warmtecapaciteit C van een blok koper met een massa van $\mathrm{m} = 375\ \mathrm{g}$. De soortelijke warmte van het koper is $382\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}$.

$$C = 143\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

Uitwerking: Voor een zuivere stof geldt dat de wamtecapaciteit gegeven is door $C = m \cdot c$. Bijgevolg is

$$C = 0,375\ kg \cdot 382\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} = 143\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

De warmtecapaciteit van het blokje koper is $143\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$.

Oefening 17.5.5. Hoeveel warmte moet je toevoegen aan een koperen bol met diameter 8,0 cm opdat de temperatuur ervan zou kunnen stijgen van – 20 °C tot 180 °C? Gegeven is dat voor koper geldt dat $\rho = 8920\ \mathrm{kg/m^3}$ en $c = 385\ \mathrm{J/(kg\cdot K)}$.

$$Q = 184.8\ \mathrm{kJ}$$

Uitwerking: De warmte die nodig is om een object van temperatuur te laten veranderen wordt gegeven door $Q = mc\Delta T$. Met de dichtheid van koper kan de massa van de bal bepaald worden:

$$m = \rho_{Cu}V = (8920\ \mathrm{kg/m^3})\frac{4}{3}\pi(0,040\ \mathrm{m})^3 = 2,4\ \mathrm{kg}.$$

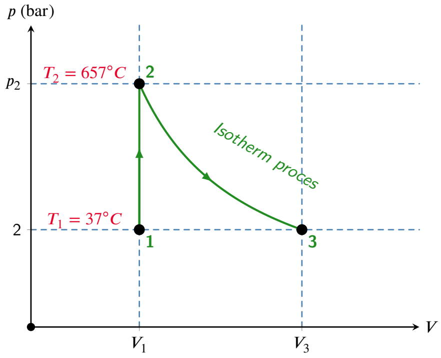
Hierin gebruikten we dat het volume van een bol gegeven wordt door $V_{bol} = \frac{4}{3}\pi(r\ \mathrm{m})^3$

Nu kan de benodigde warmte als volgt bepaald worden:

$$Q = (2,4\ \mathrm{kg})(385\ \mathrm{J/kg\ K})(200\ \mathrm{K}) = 18,8\ \mathrm{kJ}.$$

17.5.B Standaardoefeningen

Oefening 17.5.6. 8, 0 gram heliumgas volgt een proces van 1 naar 2 naar 3, zoals weergegeven op de figuur. Zoek de waarden van V_1, V_3, p_2 en T_3.



1. $V_1 = 0.026\ m^3$
2. $V_3 = 0.078\ m^3$
3. $p_2 = 6.0$ bar
4. $T_3 = 657\ °C$

Uitwerking: Om het volume in toestand 1 te vinden, kan de ideale gaswet toegepast worden. Hier is de hoeveelheid mol echter voor nodig. Deze kan als volgt bepaald worden:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{8,0 \text{ g}}{4,0 \text{ g/mol}} = 2,0 \text{ mol}.$$

Hierbij hebben we moeten gebruiken dat de molaire massa van heliumgas $4,0$ g/mol is. Dit vinden we als volgt : we weten dat heliumgas een edelgas is, of dus dat de moleculen in het gas mono-atomair zijn. Bovendien weten we dat een heliumkern twee protonen en twee neutronen bevat, waardoor de molaire massa van heliumatomen op $4,0$ g/mol komt.

Zo kan het volume in toestand 1 dan bepaald worden:

$$pV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{p} = \frac{(2,0 \text{ mol})(8,31 \text{ J/mol K})[(273+37) \text{ K}]}{2 \cdot 10^5 \text{ Pa}}$$
$$\approx 0,026 \text{ m}^3.$$

Het proces van toestand 1 naar toestand 2 is isochoor, waardoor dus geldt dat:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow p_2 = p_1\frac{T_2}{T_1} = (2 \text{ bar})\left(\frac{657+273}{37+273}\right) = 6,0 \text{ bar}$$

Het volume in toestand 3 kan bepaald worden met behulp van de wet van Boyle-Mariotte aangezien het process tussen toestand 2 en 3 isotherm is:

$$p_2V_2 = p_3V_3 \Rightarrow V_3 = \frac{p_2V_2}{p_3} = \frac{6 \text{ bar} \cdot 0,025 \text{ m}^3}{2 \text{ bar}} \approx 0,078 \text{ m}^3.$$

De temperatuur in toestand 3 is gewoon gelijk aan die in toestand 2: $T_3 = T_2 = 657°$C

Oefening 17.5.7. Een aluminium kookpot met een massa van 450 g staat op het fornuis. Er zit $0,255$ l water in de kookpot. Hoeveel warmte is er nodig om het water op te warmen van 21°C tot

CC BY-NC-SA 4.0

17.5.B Standaardoefeningen

81°C? Er is gegeven dat de soortelijke warmtecapaciteit van aluminium gelijk is aan $c = 900 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot {}^\circ\mathrm{C}}$.

De nodige warmte is: 88 kJ

Uitwerking: Het water en de kookpot nemen samen warmte op. De opgenomen warmte bestaat dus uit twee termen.

$$
\begin{aligned}
& Q_{op} = m_w c_w \left(\theta_e - 21^\circ\mathrm{C}\right) + m_{al} c_{al} \left(\theta_e - 21^\circ\mathrm{C}\right) \\
& \Leftrightarrow Q_{op} = \rho_w V_w c_w \left(\theta_e - 21^\circ\mathrm{C}\right) + m_{al} c_{al} \left(\theta_e - 21^\circ\mathrm{C}\right) \\
& \Leftrightarrow Q_{op} = 1000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 0,255 \cdot 10^{-3} \mathrm{m}^3 \cdot 4186 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot {}^\circ\mathrm{C}} (81^\circ\mathrm{C} - 21^\circ\mathrm{C}) + 0,450\,\mathrm{kg} \cdot 900 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot {}^\circ\mathrm{C}} (81^\circ\mathrm{C} - 21^\circ\mathrm{C}) \\
& \Leftrightarrow Q_{op} = 88\,\mathrm{kJ}
\end{aligned}
$$

Er is 88 kJ nodig om het water in de kookpot op te warmen van 21°C tot 81°C.

Oefening 17.5.8. Een aluminium braadpan met een massa van 750 gram wordt van het fornuis genomen en in de afwasbak met 10 liter water ondergedompeld. Daardoor stijgt de temperatuur van het water van 20 °C tot 24 °C. Wat is de oorspronkelijke temperatuur van de braadpan?

$$T = 272\ {}^\circ\mathrm{C}$$

Uitwerking: Uit de wet van behoud van energie volgt dat $Q_{\mathrm{Al}} + Q_{\mathrm{water}} = 0$ J. Hieruit volgt de volgende vergelijking:

$$m_{\mathrm{Al}} c_{\mathrm{Al}} \left[T_{\mathrm{f}} - (T_{\mathrm{i}})_{\mathrm{Al}}\right] + m_{\mathrm{water}} c_{\mathrm{water}} \left[T_{\mathrm{f}} - (T_{\mathrm{i}})_{\mathrm{water}}\right] = 0 \text{ J}.$$

De pan en het water bereiken een finale temperatuur $T_{\mathrm{f}} = 24,0^\circ C$, zodat de initiële temperatuur van de pan als volgt bepaald kan worden:

$$0 \text{ J} = (0,750 \text{ kg})(900 \text{ J/kg K}) \left[24,0^\circ\mathrm{C} - (T_{\mathrm{i}})_{\mathrm{Al}}\right] + \left(10,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3\right)\left(1000 \text{ kg/m}^3\right)(4190 \text{ J/kg K})(24,0^\circ\mathrm{C} - 20,0^\circ\mathrm{C})$$

$$0 \text{ J} = (675,0 \text{ J/K}) \left[24,0^\circ\mathrm{C} - (T_{\mathrm{i}})_{\mathrm{Al}}\right] + 167\ 600 \text{ J}$$

Hieruit kan dan de begintemperatuur van de pan bepaald worden:

$$(T_{\mathrm{i}})_{\mathrm{Al}} = 272^\circ\mathrm{C}$$

Oefening 17.5.9. Een blokje ijzer met een volume van 55 cm^3 wordt uit een oven van 850 °C gehaald en meteen in een beker met 240 ml water op 25 °C ondergedompeld. Welke hoeveelheid water kookt weg uit de beker?

$$m = 0.031 \text{ kg}$$

Uitwerking: De massa van het blokje ijzer bedraagt $m = (7870 \text{ kg/m}^3)(55 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3) = 0,433$ kg. Het ijzer zal ervoor zorgen dat al het water een temperatuur van 100°C bereikt en zal een hoeveelheid water met een massa m_{s} in stoom veranderen. De vergelijking voor het behoud van energie kan als volgt ingevuld worden:

$$
\begin{aligned}
0 \text{ J} &= Q_{\mathrm{Fe}} + Q_{\mathrm{w}} \\
&= m_{\mathrm{Fe}} c_{\mathrm{Fe}} \left[T_{\mathrm{f}} - (T_{\mathrm{i}})_{\mathrm{Fe}}\right] + m_{\mathrm{w}} c_{\mathrm{w}} \left[T_{\mathrm{f}} - (T_{\mathrm{i}})_{\mathrm{w}}\right] + m_{\mathrm{s}} \left(L_{\mathrm{v}}\right)_{\mathrm{w}}
\end{aligned}
$$

CC BY-NC-SA 4.0

17.5.B Standaardoefeningen

De eindtemperatuur van het water en het ijzeren blokje bedraagt 100°C. De bovenstaande vergelijking kan dan omgevormd worden voor m_s:

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{-m_{Fe}c_{Fe}\left[T_f - \left(T_i\right)_{Fe}\right] - m_w c_w \left[T_f - \left(T_i\right)_w\right]}{\left(L_v\right)_w} \\ &= \frac{-(0,433 \text{ kg})(449 \text{ J/kg K})(100°\text{C} - 850°\text{C}) - (0,240 \text{ kg})(4186 \text{ J/kg K})(100°\text{C} - 25°\text{C})}{22,6 \cdot 10^5 \text{ J/kg}} \\ &\approx 3,1 \cdot 10^{-2} \text{ kg} = 0,031 \text{ kg} \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

17.5.C Gevorderde oefeningen

Oefening 17.5.10. Een geïsoleerde thermosfles bevat 250 g water met een temperatuur van 20°C. We voegen hieraan een onbekende hoeveelheid water toe met een temperatuur van 50°C. De temperatuur van het water in de thermosfles wordt daardoor 40°C.

We nemen nu een blokje ijzer met onbekende massa en een temperatuur van 750°C. We voegen dit blokje toe aan het water in de thermosfles. Daardoor stijgt de temperatuur tot 60°C.

Bepaal de massa van het blokje ijzer. Gegeven is dat $c_{Fe} = 449 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot^\circ \text{C}}$

De massa van het blokje ijzer is: $0,20$ kg

Uitwerking: We bepalen eerst de massa van het water dat werd toegevoegd aan het water in de thermosfles. We passen behoud van energie toe door te stellen dat de opgenomen warmte in grootte gelijk is aan de afgegeven warmte (warmtebalans). Het water in de thermosfles neemt warmte op, het toegevoegde water geeft warmte af:

$$
\begin{aligned}
&Q_{op} = -Q_{af} \\
&\Leftrightarrow 0,250 \text{ kg} \cdot 4186 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot^\circ \text{C}} \cdot (40°\text{C} - 20°\text{C}) = -m \cdot 4186 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot^\circ \text{C}} \cdot (40°\text{C} - 50°\text{C}) \\
&\Leftrightarrow m = \frac{0,250 \text{ kg} \cdot 20°\text{C}}{10°\text{C}} \\
&\Leftrightarrow m = 0,50 \text{ kg}
\end{aligned}
$$

We gebruiken op analoge wijze opnieuw de warmtebalans om de massa van het ijzer te bepalen. Het water in de thermosfles neemt warmte op en het blokje ijzer geeft warmte af.

$$
\begin{aligned}
&Q_{op} = -Q_{af} \\
&\Leftrightarrow 0,750 \text{ kg} \cdot 4186 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot^\circ \text{C}} \cdot (60°\text{C} - 40°\text{C}) = -m_{Fe} \cdot 449 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot^\circ \text{C}} \cdot (60°\text{C} - 750°\text{C}) \\
&\Leftrightarrow m_{Fe} = \frac{0,750 \text{ kg} \cdot 4186 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot°\text{C}} \cdot (60°\text{C} - 40°\text{C}) =}{449 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot°\text{C}} \cdot (60°\text{C} - 750°\text{C})} \\
&\Leftrightarrow m_{Fe} = 0,20 \text{ kg}
\end{aligned}
$$

Het blokje ijzer heeft dus een massa van $0,20$ kg.

Oefening 17.5.11. Een stukje van een onbekend metaal met een massa van 190 g wordt opgewarmd tot 100°C. Daarna wordt het in een messing calorimeter met een massa van 124 g gegooid waarin 245 g water zit met een temperatuur van 9,5°C. De temperatuur van het water stijgt hierdoor tot 22,0°C. Bereken de soortelijke warmtecapaciteit van het onbekend metaal en probeer daarmee te bepalen over welk metaal het gaat. Gebruik een handboek of bron op het internet om dit opzoekwerk te doen. Er is gegeven dat de soortelijke warmtecapaciteit van messing gelijk is aan $c = 394 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot °\text{C}}$.

De soortelijke warmtecapaciteit is: $906 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot °\text{C}}$

Uitwerking: We passen behoud van energie toe door te stellen dat de opgenomen warmte in grootte gelijk is aan de afgegeven warmte (warmtebalans). Het water en de calorimeter nemen warmte op, het blokje onbekend metaal geeft warmte af. De opgenomen warmte bestaat dus uit twee termen.

CC BY-NC-SA 4.0

17.5.C Gevorderde oefeningen

$$\begin{aligned}
&Q_{op} = -Q_{af}\\
&\Leftrightarrow m_{\text{w}}c_{\text{w}}\left(\theta_e - 9,5°\text{C}\right) + m_{\text{mes}}c_{\text{mes}}\left(\theta_e - 9,5°\text{C}\right) = -m_{\text{x}}c_{\text{x}}\left(\theta_e - 100°\text{C}\right)\\
&\Leftrightarrow c_{\text{x}} = \frac{m_{\text{w}}c_{\text{w}}\left(\theta_e - 9,5°\text{C}\right) + m_{\text{mes}}c_{\text{mes}}\left(\theta_e - 9,5°\text{C}\right)}{-\ m_{\text{x}}\left(\theta_e - 100°\text{C}\right)}\\
&\Leftrightarrow c_{\text{x}} = \frac{0,245\,\text{kg}\cdot 4186\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot°\text{C}}\,(22,0°\text{C} - 9,5°\text{C}) + 0,124\,\text{kg}\cdot 394\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot°\text{C}}\,(22,0°\text{C} - 9,5°\text{C})}{-\ 0,190\,\text{kg}\cdot(22,0°\text{C} - 100°\text{C})}\\
&\Leftrightarrow c_{\text{x}} = 906\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot°\text{C}}
\end{aligned}$$

De soortelijke warmtecapaciteit van het onbekende metaal is $906\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot°\text{C}}$. Dat zou aluminium kunnen zijn.

Oefening 17.5.12. Je klopt een stalen nagel van 40 gram in een houten balk. Daarvoor moet je met een hamer 20 keer kloppen op de nagel. De hamer heeft een massa van 0,50 kg en de snelheid van de hamer waarmee die de nagel telkens raakt is 12 m/s. De hamer komt na elke tik volledig tot rust. Hoe sterk is de temperatuur van de nagel dan op het einde toegenomen als je mag aannemen dat de nagel 75 % van de omgezette energie absorbeert ? Er is gegeven dat de soortelijke warmtecapaciteit van staal gelijk is aan $c = 482\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot°\text{C}}$.

De temperatuurstoename van de nagel is: 28 °C

Uitwerking: We berekenen eerst de kinetische energie van de hamer op het ogenblik dat die de nagel raakt.

$$E_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{0,50\,\text{kg}\cdot\left(12\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} = 36\,\text{J}$$

Deze energie wordt omgezet in warmte die voor 75 % door de nagel wordt opgenomen. Na 20 tikken is de opgenomen energie dus:

$$Q_{op} = 20\cdot 0,75\cdot 36\,\text{J} = 54\cdot 10\,\text{J}$$

Hierdoor stijgt de temperatuur van de nagel:

$$\begin{aligned}
&Q_{op} = mc\Delta\theta\\
&\Leftrightarrow \Delta\theta = \frac{Q_{op}}{mc}\\
&\Leftrightarrow \Delta\theta = \frac{54\cdot 10\,\text{J}}{0,040\,\text{kg}\cdot 482\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot°\text{C}}}\\
&\Leftrightarrow \Delta\theta = 28°\text{C}
\end{aligned}$$

De temperatuur van de nagel neemt toe met 28°C.

CC BY-NC-SA 4.0

17.5.D Oefeningen Usolv-it

Oefening 17.5.13. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over gaswetten via het Usolv-it oefenplatform.

Oefening 17.5.14. Klik om meerkeuzevragen op te lossen over warmte via het Usolv-it oefenplatform.

CC BY-NC-SA 4.0

18.1 Herhalingsoefeningen: vectoren

Oefening 18.1.1. De grootte van een vector is 1 m. Wat zijn de x- en y-componenten indien de hoek die de vector maakt met de x-as (in tegenuurwerkzin gemeten) gelijk is aan:

1. Als de hoek $0°$ is, dan zijn $x = 1$ m en $y = 0$ m
2. Als de hoek $45°$ is, dan zijn $x \approx 0.7$ m en $y \approx 0.7$ m
3. Als de hoek $90°$ is, dan zijn $x = 0$ m en $y = 1$ m

Uitwerking: Bij een hoek van $0°$ geldt:

$$x = \cos(0°) = 1$$
$$y = \sin(0°) = 0$$

Bij een hoek van $45°$ geldt:

$$x = \cos(45°) \approx 0.7$$
$$y = \sin(45°) \approx 0.7$$

Bij een hoek van $90°$ geldt:

$$x = \cos(90°) = 0$$
$$y = \sin(90°) = 1$$

Oefening 18.1.2. Bereken de grootte van de vector $\vec{a} = \vec{e}_x + 3\vec{e}_y$. $\|\vec{a}\| = \sqrt{10}$

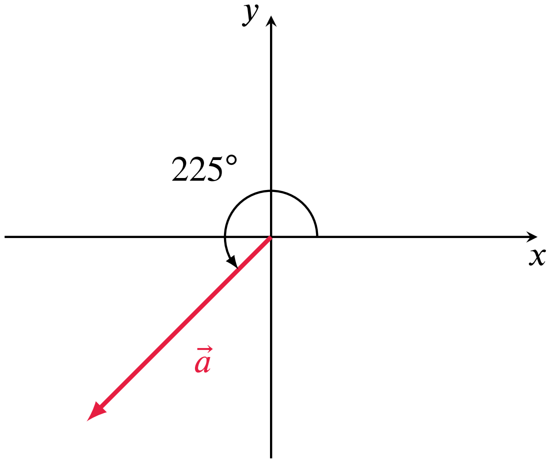
Uitwerking: De grootte van de vector wordt berekend als $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

Oefening 18.1.3. Een vector $\vec{a}$ met lengte 10 maakt een hoek van $225°$ met de x-as. Bereken de scalaire componenten volgens de x- en y-as. $a_x = -7.07, a_y = -7.07$

Uitwerking: We weten dat $\|\vec{a}\| \equiv a = 10$. We gebruiken dan dat $a_x = a\cos 225° \approx 10 \cdot (-0.707) = -7.07$ en dat $a_y = a\sin 225° \approx 10 \cdot (-0.707) = -7.07$. Ter controle kunnen we berekenen dat $\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \approx 9{,}998 \approx 10$. De reden dat we niet exact 10 terugvinden is door het afronden van ons resultaat voor de x- en y-component. We vinden dus dat zowel de x- als y-component negatief zijn, en dit komt overeen met wat we zien op een tekening:

CC BY-NC-SA 4.0

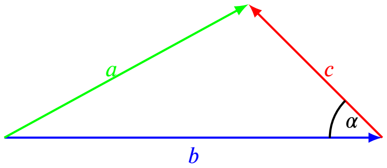
18.1 Herhalingsoefeningen: vectoren



Oefening 18.1.4. Een vogel vliegt vanuit een boom 100 meter naar het oosten. Daarna vliegt hij 50 m naar het noordwesten. Bepaal de lengte van de vector tussen de begin- en eindpositie.

$$\|\vec{a}\| = 74\ m$$

Uitwerking: De vectoren kunnen als volgt getekend worden.



De lengte van de groene vector is het gezochte antwoord. Deze kan berekend worden met de cosinusregel.

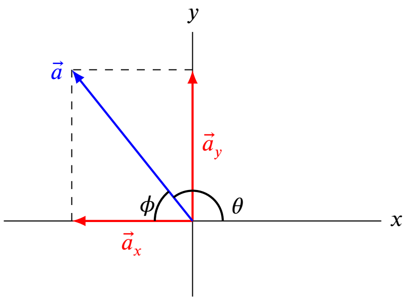
$$\begin{aligned}|a| &= \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} \\ &= \sqrt{100^2 + 50^2 - 2\cdot 100\cdot 50\cos(45°)} \\ &\approx 74\end{aligned}$$

Oefening 18.1.5. Teken de vector $\vec{a} = -4\cdot\vec{e}_x + 5\cdot\vec{e}_y$. Bepaal de hoek die deze vector maakt met de positieve x-as.

$$\theta = 129\ °$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.1 Herhalingsoefeningen: vectoren

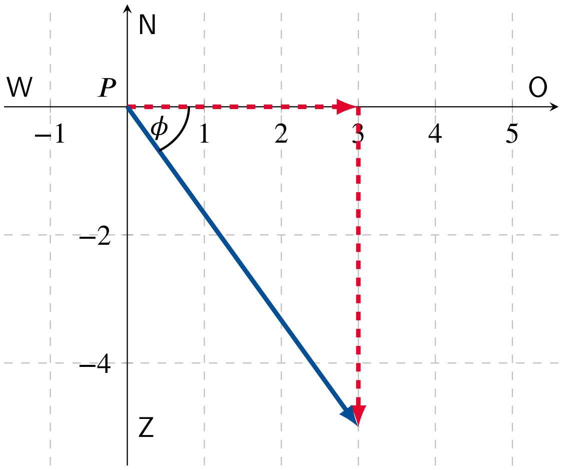


Uitwerking:

We weten dat voor een vector $\vec{a}$ de hoek met de positieve x-as gegeven wordt door $\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$, en bijgevolg vinden we de hoek als $\theta = \text{bgtan}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \text{bgtan}\left(\frac{5}{-4}\right) = 129°$. Een andere, meer visuele methode, is door te werken met de hoek ϕ, waarvoor we kunnen afleiden dat $\tan\phi = \frac{|\vec{a}_y|}{|\vec{a}_x|}$, en dus dat $\phi = \text{bgtan}\left(\frac{5}{4}\right) = 51°$. Aangezien ϕ en θ supplementair zijn, i.e. samen 180° vormen, vinden we ook dat $\theta = 180° - \phi = 129°$.

Oefening 18.1.6. Erica verplaatst zich vanuit een plaats P en gaat 3 km oostwaarts en daarna 5 km zuidwaarts. Welke verplaatsing heeft Erica gemaakt?

Uitwerking: We kunnen het traject van Erica weergeven in een grafiek. De groene vector toont de verplaatsing van 3 km naar het oosten, en de rode pijl die van 5 km naar het zuiden. Bijgevolg is de blauwe vector de totale verplaatsing.



We berekenen eerst de totale afstand van de aankomst A tot het punt P. Dit is eenvoudig te berekenen met de stelling van Pythagoras:

$$|PA| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} \approx 5,8 \text{ km}\,.$$

Voor de hoek ϕ maken we gebruik van de tangens: Binnen de driehoek is

$$\tan\phi = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \phi \approx 59°\,.$$

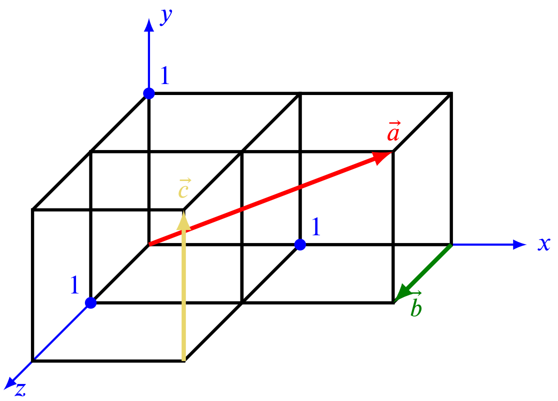
Merk op dat we hier gebruik maken van de lengtes van de zijden, die altijd positief zijn (ook al is de y-coordinaat van de rode vector negatief: De lengte is 5 km).

De totale verplaatsing die Erica dus maakt, is ongeveer 5,8 km in een richting 59° ten zuiden van het oosten.

CC BY-NC-SA 4.0

18.1 Herhalingsoefeningen: vectoren

Oefening 18.1.7. Lees op de figuur de componenten af van de drie vectoren in een driedimensionaal assenstelsel.

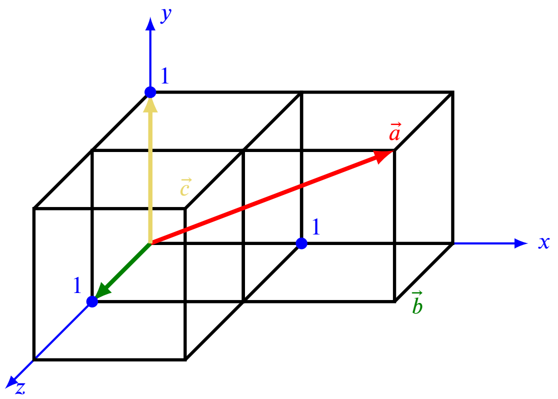


$\vec{a} = (\ 2, \ 1, \ 1 \ )$

$\vec{b} = (\ 0, \ 0, \ 1 \ )$

$\vec{c} = (\ 0, \ 1, \ 0 \ )$

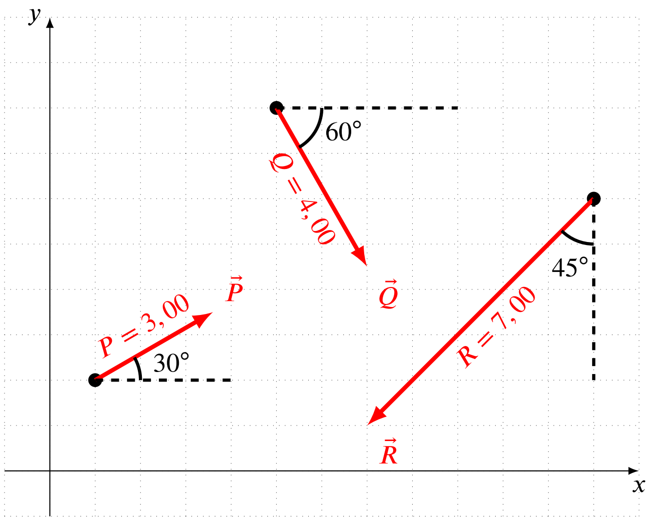
Uitwerking: Als je de vectoren in gedachten verschuift zodat ze aangrijpen in de oorsprong van het assenstelsel, komen de coördinaten van het eindpunt overeen met de componenten van de vector. Zo bekom je dat $\vec{a} = (2, 1, 1)$, $\vec{b} = (0, 0, 1)$, $\vec{c} = (0, 1, 0)$.



Oefening 18.1.8. Bepaal de componenten van de drie vectoren ten opzichte van de weergegeven x-as en y-as.

CC BY-NC-SA 4.0

18.1 Herhalingsoefeningen: vectoren



$$\vec{P} = (\ 2.6,\ \ 1.5\ )$$

$$\vec{Q} = (\ 2,\ \ -3.5\ )$$

$$\vec{R} = (\ -4.9,\ \ -4.9\ )$$

Uitwerking: De componenten kunnen als volgt berekend worden:

$$P_x = P \cdot \cos(30°) = 3,00 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,6$$

$$P_y = P \cdot \sin(30°) = 3,00 \cdot \frac{1}{2} = 1,5$$

$$Q_x = Q \cdot \cos(60°) = 4,00 \cdot \frac{1}{2} = 2,0$$

$$Q_y = -Q \cdot \sin(60°) = -4,00 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3,5$$

$$R_x = -R \cdot \sin(45°) = -7,00 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -4,9$$

$$R_y = -R \cdot \cos(45°) = -7,00 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -4,9$$

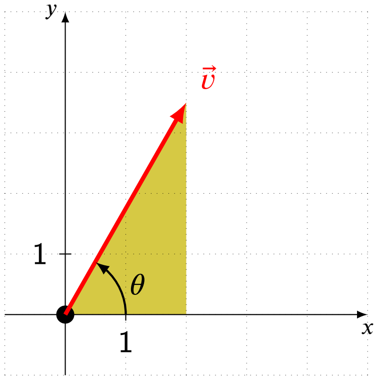
Oefening 18.1.9. Een boot vaart een meer op met een snelheid $\vec{v} = 2,0\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \vec{e}_x + 3,5\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \vec{e}_y$. Veronderstel dat de gekozen x-as samenvalt met de oever. Onder welk hoek vaart de boot ten opzichte van de oever?

$$\theta = 60\ °$$

Uitwerking: We tekenen de vector op een assenstel. De gezochte hoek is aangeduid als θ.

CC BY-NC-SA 4.0

18.1 Herhalingsoefeningen: vectoren



De grootte van de componenten komt overeen met de lengtes van de rechthoekzijden, dus geldt dat

$$\tan(\theta) = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \theta = \text{Bgtan}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \text{Bgtan}\left(\frac{3,5}{2}\right) = 60°$$

De boot vaart dus onder een hoek van 60° met de oever.

Oefening 18.1.10. Bepaal de hoek tussen de twee vectoren $\vec{a} = 4\ \vec{e}_x + 2\ \vec{e}_y$ en $\vec{b} = 1\ \vec{e}_x + 4\ \vec{e}_y$.

$$\theta = 49\ °$$

Uitwerking: Uit de opgave leiden we af dat $a_x = 4$, $a_y = 2$, $b_x = 1$ en $b_y = 4$. Het scalair product van deze vectoren is gelijk aan:

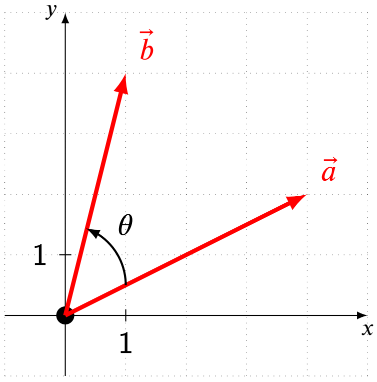
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = 4 + 8 = 12\,.$$

Anderzijds berekenen we dat $\|\vec{a}\| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ en dat $\left\|\vec{b}\right\| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$. Per definitie is $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos\theta$. Bijgevolg kunnen we de hoek θ bepalen.

$$\cos\theta = \frac{12}{\sqrt{20}\sqrt{17}}$$

, oftewel

$$\theta = \text{bgcos}\left(\frac{12}{\sqrt{340}}\right) = 49°\,.$$



18.1 Herhalingsoefeningen: vectoren

Oefening 18.1.11. Gegeven twee vectoren $\vec{a} = 3\,\vec{e}_x + 2\,\vec{e}_y$ en $\vec{b} = m\,\cdot \vec{e}_x + 3\,\vec{e}_y$. Bepaal m zodat de twee vectoren loodrecht op elkaar staan

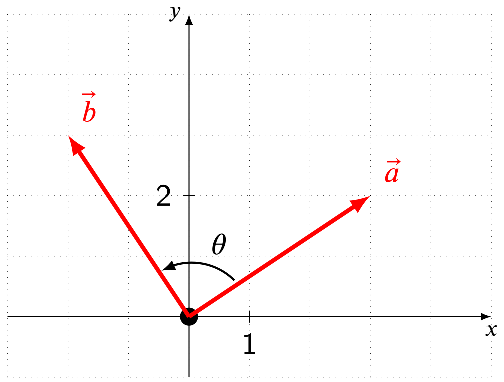
$$m = -2$$

Uitwerking: Uit de opgave leiden we af dat $a_x = 3$, $a_y = 2$, $b_x = m$ en $b_y = 3$. Het scalair product van deze vectoren is gelijk aan:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = 3m + 6$$

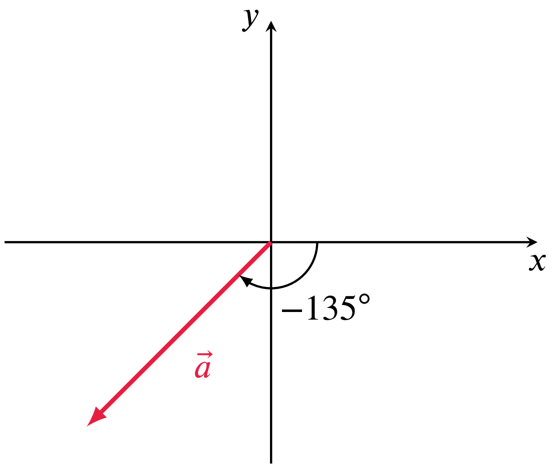
Per definitie is $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta$. Als de hoek $\theta = 90°$ is het scalair product gelijk aan nul. Dus geldt dat

$$3m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-6}{3} = -2$$



Oefening 18.1.12. Een vector $\vec{a}$ met lengte 5 maakt een hoek van -135° met de x-as. Bereken de vectorcomponenten volgens $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$. $a_x = -3.54, a_y = -3.54$

Uitwerking: We weten dat $\|\vec{a}\| \equiv a = 5$. We gebruiken dan dat $a_x = a\cos(-135)° \approx 5 \cdot (-0,707) = -3,54$ en dat $a_y = a\sin(-135)° \approx 5 \cdot (-0,707) = -3,54$. Ter controle kunnen we berekenen dat $\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \approx 5$. We vinden dus dat zowel de x- als y-component negatief zijn, en dit komt overeen met wat we zien op een tekening:



CC BY-NC-SA 4.0

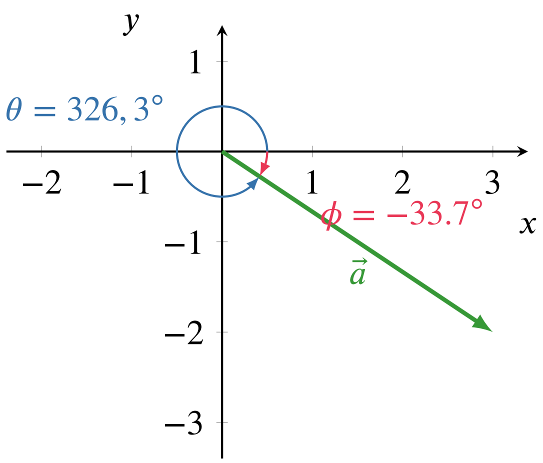
18.1 Herhalingsoefeningen: vectoren

Oefening 18.1.13. Wat is de grootte van de vector $\vec{c} = 3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y$ en welke hoek maakt deze vector met de x-as?

Uitwerking: Voor de grootte van de vector vinden we dat $c = \|\vec{c}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$. De hoek die de vector maakt met de x-as vinden we met de formule $\tan\phi = \frac{a_y}{a_x}$. Dan vinden we met het rekenmachine dat

$$\phi = Bgtan\frac{-2}{3} \approx -33,7°\,.$$

Willen we echter de positieve hoek, i.e. tegen de wijzers in vertrekkende van de positieve x-as, dan moeten we hier 360° bij optellen. Zo vinden we dat $\theta = 326,3°$.



Oefening 18.1.14. Een vector $\vec{v}$ maakt een hoek van 150° met de positieve x-as en heeft een y-component van 10 m/s. Wat is de waarde van v?

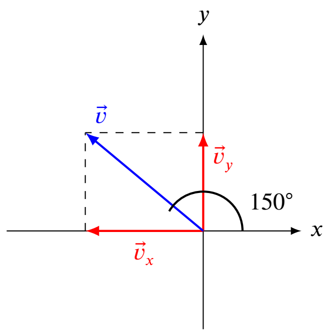
$$v = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Uitwerking: We weten dat $v_y = v\sin\theta$ en dat $v_y = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Zo vinden we dan dat

$$v = \frac{v_y}{\sin 150°}\,,$$

en bijgevolg

$$v = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

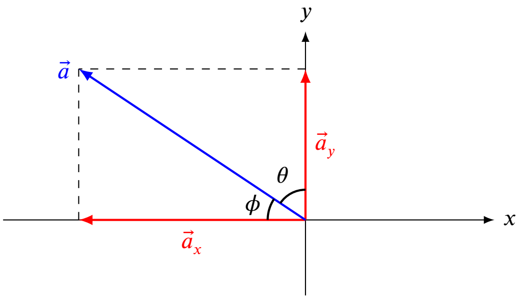


CC BY-NC-SA 4.0

18.1 Herhalingsoefeningen: vectoren

Oefening 18.1.15. Teken de vector $\vec{a} = -3 \cdot \vec{e}_x + 2 \cdot \vec{e}_y$. Bepaal de hoek die deze vector maakt met de positieve y-as.

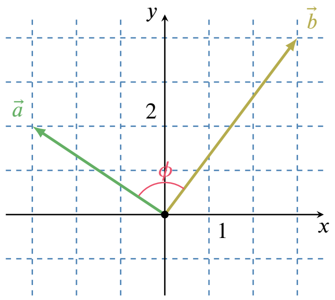
$$\theta = 56\ ^\circ$$



Uitwerking:

Op de figuur zien we dat we voor de hoek ϕ kunnen aflezen dat $\tan\phi = \frac{|a_y|}{|a_x|}$, en dus dat $\phi = \text{bgtan}\left(\frac{2}{3}\right) = 34°$. Aangezien ϕ en θ complementaire hoeken zijn, i.e. samen 90° vormen, vinden we ook dat $\theta = 90° - \phi = 56°$.

Oefening 18.1.16. Bepaal de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zoals weergegeven op de figuur.



$$\varphi = 93\ ^\circ$$

Uitwerking: We zullen gebruiken dat $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos\varphi$ om de hoek φ te bepalen. Op de figuur zien we dat $\vec{a} = (-3, 2)$ en $\vec{b} = (3, 4)$. Bijgevolg kunnen we het scalair product berekenen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = -9 + 8 = -1\,.$$

Anderzijds berekenen we dat $\|\vec{a}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ en dat $\left\|\vec{b}\right\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25}$. Dit geeft ons dat $\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{13}\sqrt{25}}$, oftewel

$$\varphi = \text{bgcos}\left(\frac{-1}{5\sqrt{13}}\right) = 93°\,.$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.2 Herhalingsoefeningen: de 1D-beweging

Oefening 18.2.1. Een fietser rijdt gedurende 20 minuten 8,0 km naar het oosten, dan keert hij terug en rijdt 3,2 km gedurende 8 minuten naar het westen. Daarna rijdt hij 16,0 km gedurende 40 minuten weer naar het oosten. Wat was zijn gemiddelde snelheid? Geef je antwoord in m/s.

$$v_{x,g} = 5.2 \text{ m/s}$$

Uitwerking: De gemiddelde snelheid wordt berekend als $v_{x,g} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. We kiezen de x-as in de richting van het oosten, zodat je kan stellen dat de totale verplaatsing gelijk is aan

$$\Delta x = 8,0 \text{ km} - 3,2 \text{ km} + 16,0 \text{ km} = 20,8 \text{ km} = 20,8 \cdot 10^3 \text{m}$$

Merk op dat de verplaatsing die tegen de x-as in verloopt, negatief is. De totale duur van de fietstocht is gelijk aan

$$\Delta t = 20 \text{ min} + 8 \text{ min} + 40 \text{ min} = 68 \text{ min} = 4,0 \cdot 10^3 \text{s}$$

Bijgevolg is

$$v_{x,g} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{20,8 \cdot 10^3 \text{m}}{4,0 \cdot 10^3 \text{s}} = 5,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

De gemiddelde snelheid tijdens de fietstocht is $5,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Oefening 18.2.2. Een deeltje beweegt langs de x-as volgens de vergelijking $x(t) = 10t - 2t^2$. Bereken de snelheid op $t = 2$ s en $t = 3$ s. Wat is de gemiddelde snelheid tussen $t = 2$ s en $t = 3$ s? De positie wordt bepaald in m en de tijd in s.

$$v_{x,1} = 2 \text{ m/s}$$

$$v_{x,2} = -2 \text{ m/s}$$

$$v_{x,g} = 0 \text{ m/s}$$

Uitwerking: We bepalen eerst de snelheidsvergelijking door de x(t)-functie af te leiden:

$$v_x(t) = 10 - 4t$$

Door de opgegeven tijdstippen in te vullen in de positie- en de snelheidsvergelijking, bekomen we dat $x_1 = 12$ m, $x_2 = 12$ m, $v_{x,1} = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$ en $v_{x,2} = -2\frac{\text{m}}{\text{s}}$ Bijgevolg is de gemiddelde snelheid gelijk aan

$$v_{x,g} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{12 \text{ m} - 12 \text{ m}}{3,0 \text{ s} - 2,0 \text{ s}} = 0$$

Oefening 18.2.3. Een auto verlaat de garage vanuit rust met een constante versnelling van $1,3\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Welke afstand legt de auto af alvorens een snelheid van $10,4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ te hebben?

$$\Delta x = 42 \text{ m}$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.2 Herhalingsoefeningen: de 1D-beweging

Uitwerking: We kiezen de x-as met de beweging van de auto mee en de oorsprong valt samen met het vertrekpunt van de auto. Bijgevolg kunnen we de beweging ten opzichte van de x-as beschrijven door $x(t) = \frac{1,3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2} \cdot t^2$ en $v_x(t) = 1,3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t$. De snelheid wordt gelijk aan $10,4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ als

$$10,4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1,3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t \Leftrightarrow t = 8,0\ \mathrm{s}$$

Dit tijdstip vullen we in in de positievergelijking en bekomen

$$x(8,0\ \mathrm{s}) = \frac{1,3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2} \cdot (8,0\ \mathrm{s})^2 = 42\ \mathrm{m}$$

Na 42 m heeft de auto een snelheid van $10,4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ bereikt.

Oefening 18.2.4. Een trein van 130 m lang rijdt het station binnen aan een snelheid van 22,0 m/s en een vertraging van 0,150 m/s². Het station is 210 m lang. Aan welke snelheid verlaat de achterkant van de trein het station?

$$v = 19.6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Uitwerking: We kiezen de x-as met de beweging van de trein mee en de oorsprong kiezen we op de plaats waar de trein het station binnenrijdt. Op het ogenblik dat de trein het station binnenrijdt bevindt de achterkant van de trein zich 130 m voor het station en heeft dezelfde snelheid als de voorkant van de trein. Bijgevolg kunnen we de beweging van de achterkant van de trein ten opzichte van de x-as beschrijven door

$$x(t) = -130\ \mathrm{m} + 22,0\frac{m}{s} \cdot t - \frac{0,150\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2} \cdot t^2$$

Wanneer de achterkant het station verlaat is x = 210 m.

$$210\ \mathrm{m} = -130\ \mathrm{m} + 22,0\frac{m}{s} \cdot t - \frac{0,150\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2} \cdot t^2$$

We laten nu voor de eenvoud de eenheden weg. Bijgevolg is

$$-0,075 \cdot t^2 + 22,0 \cdot t - 340 = 0$$

De oplossing van deze vergelijking levert twee tijdstippen: $t_1 = 16$ s en $t_2 = 277$ s

De achterkant van de trein verlaat het station dus na 16 s.

De snelheid van de achterkant van de trein wordt beschreven door

$$v_x(t) = 22,0\frac{m}{s} - 0,150\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t$$

Na 16 s is de snelheid dus

$$v_x(16\ \mathrm{s}) = 22,0\frac{m}{s} - 0,150\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 16\ \mathrm{s} = 19,6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

De achterkant van de trein verlaat het station aan een snelheid van $19,6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Oefening 18.2.5. Een reddingshelikopter hangt boven een persoon wiens boot is gezonken. Eén van de hulpverleners gooit een zwemvest naar beneden met een beginsnelheid van 1,40 m/s. Het duurt 1,8 s alvorens die in het water valt. Hoe hoog bevindt de helicopter zich boven het slachtoffer? Je mag de weerstand van de lucht verwaarlozen.

18.2 Herhalingsoefeningen: de 1D-beweging

$$h = 18 \text{ m}$$

Uitwerking: We kiezen de x-as met de beweging van de zwemvest mee en de oorsprong kiezen we op de plaats waar de zwemvest uit de helicopter wordt gegooid. Bijgevolg kunnen we de beweging van de zwemvest ten opzichte van de x-as beschrijven door

$$x(t) = 1,40\frac{m}{s} \cdot t + \frac{9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot t^2$$

Wanneer de zwemvest in het water valt is t = 1,8 s.

$$x(1,8 \text{ s}) = 1,40\frac{m}{s} \cdot 1,8 \text{ s} + \frac{9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot (1,8 \text{ s})^2 = 18 \text{ m}$$

De helicopter bevindt zich 18 m boven het slachtoffer.

Oefening 18.2.6. Een wagen rijdt over een rechte weg. De snelheid van de wagen wordt ten opzichte van een x-as die samenvalt met de weg, beschreven als

$$v_x(t) = 4t^3 - 3t^2 + 6t - 2$$

De startpositie van de wagen is $x_0 = 20$ m. De positie wordt uitgedrukt in m en de tijd in s. Bepaal de positie van de wagen op $t = 2$ s

$$x = 36 \text{ m}$$

Uitwerking: De snelheidsvergelijking bekom je door de positievergelijking $x(t)$ af te leiden. We zoeken nu een functie $x(t)$ die als afgeleide de opgegeven snelheidsvergelijking heeft. We bekomen:

$$x(t) = t^4 - t^3 + 3t^2 - 2t + x_0$$

Omdat gegeven is dat $x_0 = 20$ m, kunnen we schrijven dat

$$x(t) = t^4 - t^3 + 3t^2 - 2t + 20$$

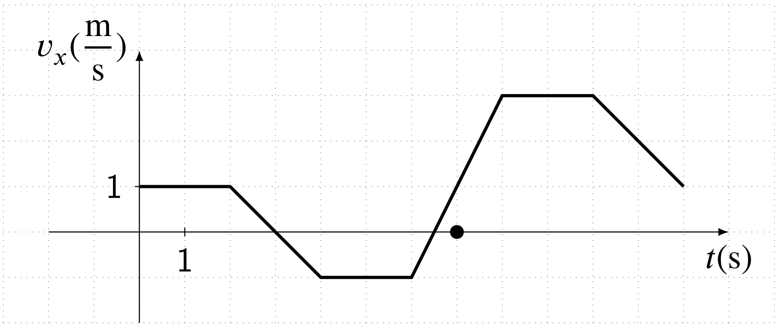
We vullen hierin het tijdstip $t = 2$ s in:

$$x(2) = 2^4 - 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 20 = 36$$

De positie van de wagen na 2 s is dus 36 m.

Oefening 18.2.7. Onderstaande grafiek geeft het verloop van de snelheid van een wandelaar weer ten opzichte van een gekozen x-as. Als je weet dat bij $t = 0$ de positie gelijk is aan $x_0 = 5$ m, wat is dan de positie, de snelheid en de versnelling van de wandelaar op $t = 7$ s?

CC BY-NC-SA 4.0

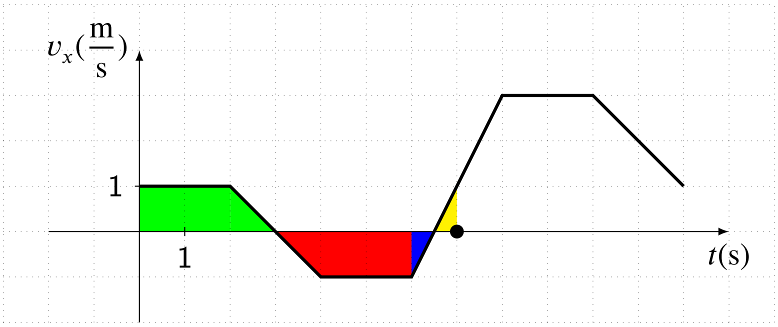


$$x = 5 \text{ m}$$

$$v_x = 1 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_x = 2 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Uitwerking: De snelheid op $t = 7$ s kunnen we meteen aflezen: $v_x(7,0 \text{ s}) = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Om de verplaatsing ten opzichte van het startpunt te zoeken, bepalen we de oppervlakte onder de $v_x(t)$-grafiek.



De groene oppervlakte komt overeen met $\Delta x_{groen} = 2,5$ m, De rode oppervlakte komt overeen met $\Delta x_{rood} = -2,5$ m, De blauwe oppervlakte komt overeen met $\Delta x_{blauw} = -0,5$ m, De gele oppervlakte komt overeen met $\Delta x_{geel} = 0,5$ m. De totale verplaatsing ten opzichte van het startpunt is de som van deze verplaatsingen, dus is gelijk aan $\Delta x = 0$ m. De positie op $t = 7$ s is bijgevolg

$$x\,(7 \text{ s}) = 5 \text{ m}$$

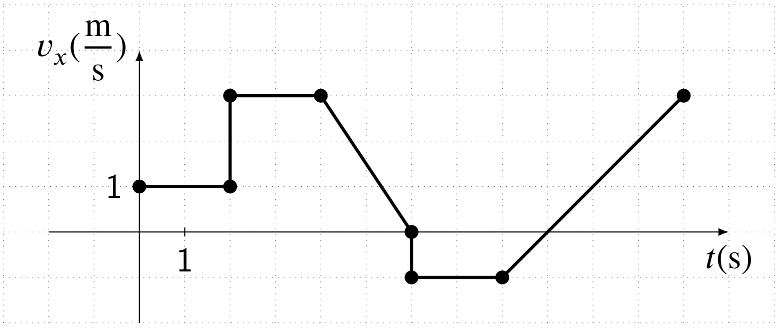
Om de versnelling te bepalen op $t = 7$ s bepalen we de helling van de snelheidsgrafiek. We bepalen de richtingscoëfficiënt van de rechte tussen $t = 6$ s en $t = 8$ s en vinden

$$a_x\,(7 \text{ s}) = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{3\frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-1\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{8 \text{ s} - 6 \text{ s}} = 2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

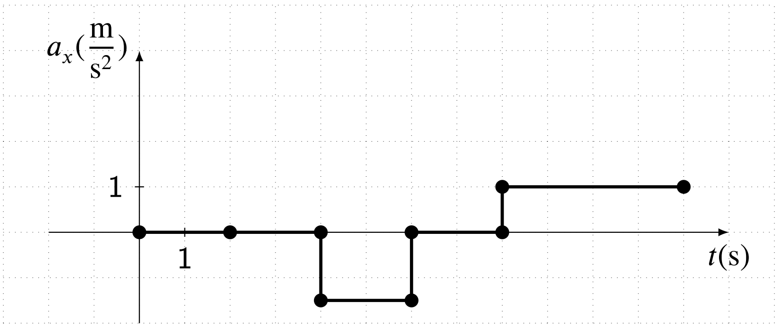
Oefening 18.2.8. Onderstaande grafiek geeft het verloop van de snelheid van een voorwerp weer ten opzichte van een gekozen x-as. Als je weet dat bij $t = 0$ de positie gelijk is aan $x_0 = 0$ m, schets dan de bijhorende $x(t)$- en $a_x(t)$-grafiek.

CC BY-NC-SA 4.0

18.2 Herhalingsoefeningen: de 1D-beweging



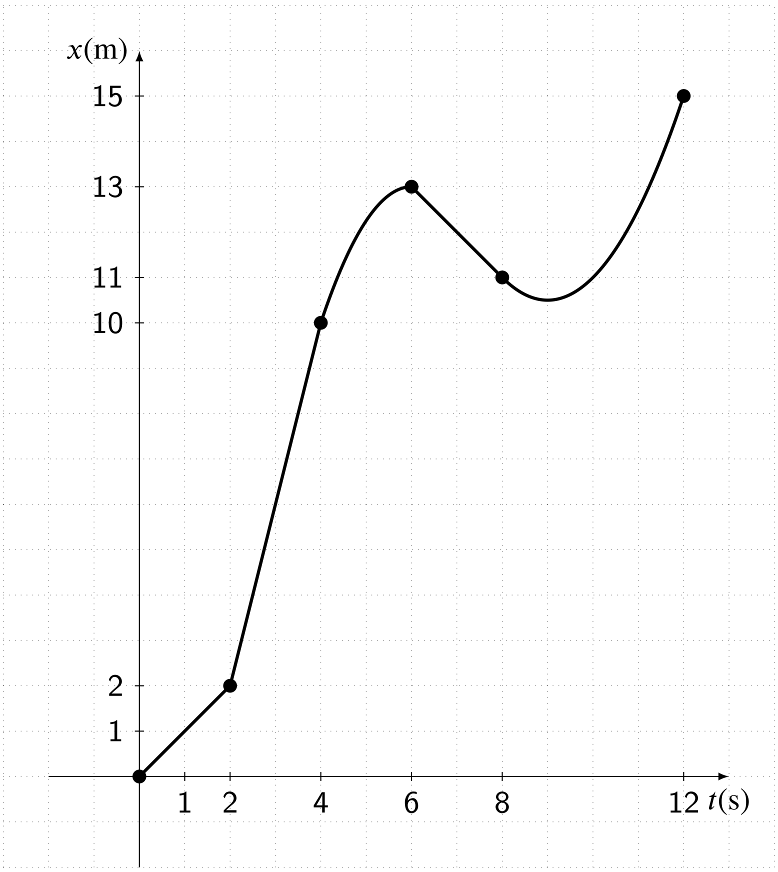
Uitwerking: De versnellingsgrafiek geeft de afgeleide weer van de snelheidsgrafiek



Als de snelheid constant is, is de x(t)-grafiek een rechte met een richtingscoëfficiënt die gelijk is aan de snelheid. Als de snelheidsgrafiek een rechte is, is de x(t)-grafiek een parabool. Bij een positieve versnelling is dit een dalparabool en bij een negatieve versnelling is dit een bergparabool. We bekomen dus

CC BY-NC-SA 4.0

18.2 Herhalingsoefeningen: de 1D-beweging



Oefening 18.2.9. Twee treinen rijden in tegenovergestelde zin aan een constante snelheid naar elkaar toe. De ene trein rijdt 108 km/h en de andere trein 144 km/h. Op een bepaald ogenblik zijn ze 1400 m van elkaar verwijderd. Hoeveel seconden later zullen ze elkaar kruisen?

$$\Delta t = 20 \text{ s}$$

Uitwerking: We kiezen een x-as horizontaal naar rechts waarvan de oorsprong samenvalt met de positie van de eerste trein op het ogenblik dat de andere trein zich op 1400 m bevindt. De snelheid van de eerste trein is 108 km/h of 30 m/s. Bijgevolg is

$$x_1(t) = 30t$$

De snelheid van de tweede trein is 144 km/h of 40 m/s. Deze trein rijdt tegen de x-as in. Bijgevolg kunnen we de positie van de tweede trein schrijven als

$$x_2(t) = 1400 - 40t$$

Op het ogenblik van het kruisen van de twee treinen geldt dat

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_2(t) \\ 30t &= 1400 - 40t \\ 70t &= 1400 \\ t &= 20 \end{aligned}$$

De treinen kruisen elkaar na 20 seconden.

18.2 Herhalingsoefeningen: de 1D-beweging

Oefening 18.2.10. Een fietser vertrekt vanuit rust met een constante versnelling zodat dat hij tussen de vierde en de vijfde seconde 9 meter aflegt. Bepaal de versnelling van de fietser.

$$a_x = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Uitwerking: We kiezen een x-as horizontaal naar rechts waarvan de oorsprong samenvalt met de positie van het vertrek van de fietser. De beginpositie en de beginsnelheid zijn gelijk aan nul, dus geldt dat

$$x(t) = \frac{a_x}{2} \cdot t^2$$

Tussen de vierde en vijfde seconde wordt 9 meter afgelegd, dus kunnen we schrijven dat

$$\begin{aligned} x(5) - x(4) &= \frac{a_x}{2} \cdot 5^2 - \frac{a_x}{2} \cdot 4^2 \\ 9 &= \frac{a_x}{2} \cdot (25 - 16) \\ 2 &= a_x \end{aligned}$$

De versnelling van de fietser is $2 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

CC BY-NC-SA 4.0

18.3 Herhalingsoefeningen: de 2D-beweging

Oefening 18.3.1. De positie van een deeltje varieert van $\vec{r}_1 = -2,0 \cdot \vec{e}_x + 4,0 \cdot \vec{e}_y$ naar $\vec{r}_2 = 5,0 \cdot \vec{e}_x + 7,0 \cdot \vec{e}_y$. Wat is de verplaatsing van dit deeltje ten opzichte van de x-as en de y-as? De eenheid wordt uitgedrukt in m.

$$\Delta x = 7.0 \text{ m}$$

$$\Delta y = 3.0 \text{ m}$$

Uitwerking: De verplaatsingsvector is gelijk aan

$$\begin{aligned}
&\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\
&\Leftrightarrow \Delta\vec{r} = \left(5,0 \cdot \vec{e}_x + 7,0 \cdot \vec{e}_y\right) - \left(-2,0 \cdot \vec{e}_x + 4,0 \cdot \vec{e}_y\right) \\
&\Leftrightarrow \Delta\vec{r} = (5,0 - (-2,0)) \cdot \vec{e}_x + (7,0 - 4,0) \cdot \vec{e}_y \\
&\Leftrightarrow \Delta\vec{r} = 7,0 \cdot \vec{e}_x + 3,0 \cdot \vec{e}_y = (7,0; 3,0)
\end{aligned}$$

Omdat we ook kunnen schrijven dat $\Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y)$ volgt dat $\Delta x = 7,0$ en $\Delta y = 3,0$.

Oefening 18.3.2. Een golfer klopt een balletje in een eerste shot zodat de verplaatsing van het balletje kan beschreven worden door een verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}_1 = 250 \cdot \vec{e}_x$. Zijn tweede shot wordt beschreven door $\Delta\vec{r}_2 = 175 \cdot \vec{e}_x + 66 \cdot \vec{e}_y$. Wat is de afstand dat het balletje aflegt in elk shot en wat is de lengte van de totale verplaatsingsvector? De positie wordt uitgedrukt in meter.

$$\|\Delta\vec{r}_1\| = 250 \text{ m}$$

$$\|\Delta\vec{r}_1\| = 187 \text{ m}$$

$$\|\Delta\vec{r}\| = 430 \text{ m}$$

Uitwerking: De afstand die het balletje aflegt komt overeen met de lengte van de verplaatsingsvector. Voor het eerste shot geldt dat

$$\|\Delta\vec{r}_1\| = \sqrt{\left(\Delta x_1\right)^2 + \left(\Delta y_1\right)^2} = \sqrt{(250 \text{ m})^2 + (0 \text{ m})^2} = 250 \text{ m}$$

Voor het tweede shot geldt dat

$$\|\Delta\vec{r}_2\| = \sqrt{\left(\Delta x_2\right)^2 + \left(\Delta y_2\right)^2} = \sqrt{(175 \text{ m})^2 + (66 \text{ m})^2} = 187 \text{ m}$$

De som van de twee verplaatsingsvectoren is gelijk aan

$$\begin{aligned}
&\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 \\
&\Leftrightarrow \Delta\vec{r} = 250 \cdot \vec{e}_x + 175 \cdot \vec{e}_x + 66 \cdot \vec{e}_y \\
&\Leftrightarrow \Delta\vec{r} = 425 \cdot \vec{e}_x + 66 \cdot \vec{e}_y
\end{aligned}$$

Bijgevolg is de lengte van de totale verpaatsing gelijk aan

$$\|\Delta\vec{r}\| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(425 \text{ m})^2 + (66 \text{ m})^2} = 430 \text{ m}$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.3 Herhalingsoefeningen: de 2D-beweging

Oefening 18.3.3. Een boot vertrekt vanuit rust uit de haven op $t = 0$ en vaart een meer op met een versnelling $\vec{a} = 2,5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \vec{e}_x$. Een sterke wind blaast de boot vooruit waardoor de boot een extra snelheid krijgt $\vec{v} = 2,0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \vec{e}_x + 3,5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \vec{e}_y$. Hoe groot is de snelheid van de boot na 5 seconden?

$$v = 15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Uitwerking: De boot vertrekt vanuit rust en versnelt in de richting van de x-as. De snelheidsvergelijkingen van de boot in afwezigheid van wind ten opzichte van de x-as en de y-as zijn dan $v_x(t) = 2,5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t$ en $v_y(t) = 0$. Tellen we hier de extra snelheid vanwege de wind bij, dan bekomen we na 5 seconden:

$$v_x = 2,5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5\ s + 2,0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 14,5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

en

$$v_y = 3,5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

De grootte van de totale snelheid is bijgevolg

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(14,5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \left(3,5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Oefening 18.3.4. Een dartspijltje wordt met een snelheid van $12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ horizontaal weggegooid in de richting van de roos van het dartsbord, dat $2,6\ \mathrm{m}$ verder staat opgesteld. Hoever onder de roos raakt het dartspijltje het bord?

$$\Delta y = 24\ \mathrm{cm}$$

Uitwerking: We passen de algemene formule voor de eenparig veranderlijke beweging toe $x = x_0 + v_{x,0} \cdot t + \frac{a_x}{2} \cdot t^2$ op deze opgave.

We kiezen de x-as horizontaal naar rechts en de y-as verticaal omhoog. Het pijltje vertrekt in de oorsprong van het assenstelsel.

We bekomen dan voor de x-richting

$$x(t) = 12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t$$

.

Voor de y-richting wordt dit

$$y(t) = \frac{-9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2} \cdot t^2$$

Op het ogenblik dat het dartspijltje de roos raakt, geldt voor de x-richting dat $2,6\ \mathrm{m} = 12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t$. Hieruit volgt dat $t = \frac{2,6}{12}\mathrm{s} = 0,22\ \mathrm{s}$.

We vullen deze waarde in in de $y = -4,9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0,22\ \mathrm{s})^2 = -0,24\ \mathrm{m}$

Het pijltje zakt dus tijdens de beweging naar de roos over een afstand van 24 cm.

Oefening 18.3.5. Een vliegtuig vliegt met een snelheid van 360 km/h op een hoogte van 750 m. Een pallet met voedsel wordt uit het vliegtuig geduwd. Veronderstel dat de parachute niet open gaat, hoe ver van het punt waar de pallet het vliegtuig verlaat komt dit neer op de grond?

CC BY-NC-SA 4.0

18.3 Herhalingsoefeningen: de 2D-beweging

$$\Delta x = 124 \cdot 10 \text{ m}$$

Uitwerking: Op het ogenblik dat de palet gelost wordt is $t_0 = 0$, en de positie $x_0 = 0, y_0 = 750$ m. We kiezen de x-as horizontaal naar rechts en de y-as verticaal omhoog. We zoeken eerst hoe lang het duurt voor de palet om 750 meter naar beneden te vallen. De bewegingsvergelijking is

$$y(t) = 750 \text{ m} + \frac{1}{2}\left(-9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t^2$$

en dus vinden we $y(t) = 0$ voor $t = \sqrt{\frac{1500}{9,81}}$ s $= 12,4$ s.

Voor de beweging in de x-richting vinden we, aangezien het vliegtuig een snelheid heeft van 100 m/s, dat

$$x(t) = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t\,.$$

Zo vinden we dat $x(t) = 1240 \text{ m} = 124 \cdot 10 \text{ m}$.

De pallet komt $124 \cdot 10$ m verder dan het punt waar het het vliegtuig verlaat, neer op de grond.

Oefening 18.3.6. Op een bepaald ogenblik zakt een warmeluchtballon op 75 m hoogte verticaal naar beneden met een snelheid van $1,5\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Op dit ogenblik gooit een meisje een bal horizontaal weg met een snelheid van $15\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wanneer het meisje op de grond landt, hoe ver van de landingsplaats zal ze haar bal terugvinden?

$$\Delta x = 57 \text{ m}$$

Uitwerking: We passen de algemene formule voor de eenparig veranderlijke beweging toe $x = x_0 + v_{x,0} \cdot t + \frac{a_x}{2} \cdot t^2$ op deze opgave.

We kiezen de x-as horizontaal naar rechts en de y-as verticaal omhoog. We kiezen de oorsprong op de grond onder de luchtballon. Het balletje vertrekt horizontaal op 75 m hoogte.

We bekomen voor de x-richting

$$x(t) = 15\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$$

.

Voor de y-richting wordt dit

$$y = 75 \text{ m} - 1,5\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + \frac{-9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot t^2$$

Op het ogenblik dat het balletje de grond raakt, geldt voor de y-richting dat

$$0 = 75 \text{ m} - 1,5\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 4,91\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2$$

De oplossing van deze vergelijking levert het tijdstip waarop de bal de grond raakt. We bekomen hiervoor $t = 3,8$ s.

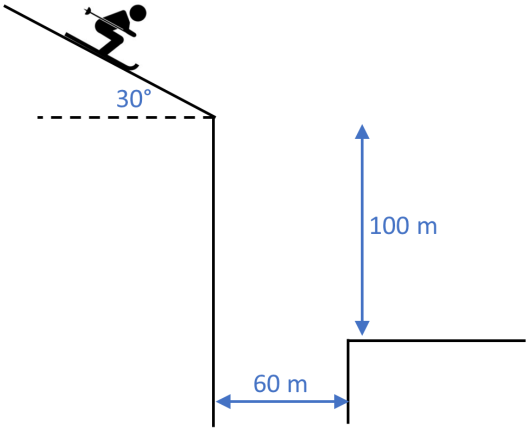
We vullen deze waarde in in de x(t)-vergelijking en bekomen $x(3,8 \text{ s}) = 15\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3,8 \text{ s} = 57 \text{ m}$.

Het meisje vindt de bal op 57 m van de landingsplaats.

CC BY-NC-SA 4.0

18.3 Herhalingsoefeningen: de 2D-beweging

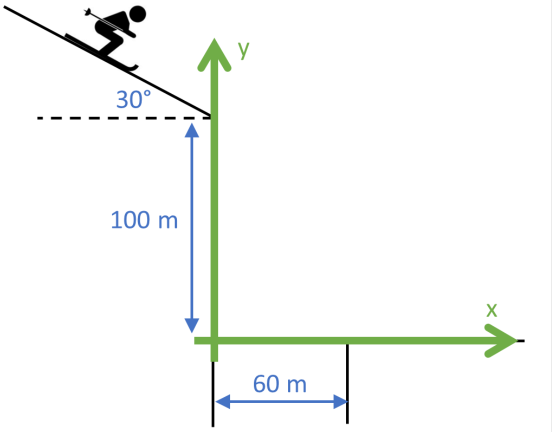
Oefening 18.3.7. Een skiër skiet langs een helling die 30° maakt met de horizontale richting aan een snelheid van 54 km/h naar beneden. Plots verschijnt er een kloof van 60 m breed. De overkant van de kloof ligt 100 m lager. Zal de skier over de kloof geraken? Hoeveel meter legt de skiër in horizontale richting af als hij 100 m zakt?



$$\Delta x = 49 \text{ m}$$

Uitwerking: We passen de algemene formule voor de eenparig veranderlijke beweging toe $x = x_0 + v_{x,0} \cdot t + \frac{a_x}{2} \cdot t^2$ op deze opgave.

We kiezen de x-as horizontaal naar rechts en de y-as verticaal omhoog, zoals weergegeven op de figuur.



We nemen als startpositie van skiër (0,100) en een beginsnelheid $v_{x,0} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos(30°) = 13 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ en $v_{y,0} = -15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin(30°) = -7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

We bekomen voor de x-richting

$$x = 13 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.3 Herhalingsoefeningen: de 2D-beweging

.

Voor de y-richting wordt dit

$$y = 100\ \text{m} - 7,5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + \frac{-9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot t^2$$

Op het ogenblik dat de skiër 100 m gezakt is, geldt voor de y-richting dat

$$0 = 100\ \text{m} - 7,5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 4,9\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2$$

De oplossing van deze vergelijking levert het tijdstip waarop de skiër 100 m lager is beland. We bekomen hiervoor $t = 3,8\ \text{s}$.

We vullen deze waarde in in de x(t)-vergelijking en bekomen $x = 13\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3,8\ \text{s} = 49\ \text{m}$.

De skiër legt tijdens het zakken van 100 m in de horizontale richting slechts een afstand van 49 m af. Hij komt dus in de kloof terecht.

Oefening 18.3.8. Een vliegwiel draait 35 toeren per seconde aan een constante snelheid. Over welke hoek, uitgedrukt in radialen, draait een punt op het vliegwiel in 20 seconden?

$$\Delta\theta = 44 \cdot 10^2\ \text{rad}$$

Uitwerking: De hoeksnelheid is gelijk aan $\omega = 2\pi \cdot f$. De frequentie is $f = 35\ \text{Hz}$, bijgevolg is de hoeksnelheid gelijk aan $\omega = 2\pi \cdot 35\ \text{Hz} = 22 \cdot 10\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Een punt op het vliegwiel draait dus per seconde over een hoek van 220 radialen. Na 20 seconden is dus $\Delta\theta = 22 \cdot 10\frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 20\ \text{s} = 44 \cdot 10^2\ \text{rad}$

Oefening 18.3.9. Een loopster die deelneemt aan de 200 m wedstrijd moet aan het einde van de piste omkeren. De bocht van de piste heeft een straal van 40,0 m. De loopster loopt de volledige wedstrijd aan eenzelfde snelheid. Ze loopt de wedstrijd uit in 25,0 s. Hoe groot is haar centripetale versnelling als ze bocht neemt?

$$a = 1.6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Uitwerking: De constante snelheid van de loopster is gelijk aan $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{200\ \text{m}}{25,0\ \text{s}} = 8,00\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Voor de versnelling van een object dat een eenparige cirkelbeweging uitvoert, geldt dat

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(8,00\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{40,0\ \text{m}} = 1,60\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Oefening 18.3.10. Een ventilator draait met een constane snelheid 350 toeren per minuut. Hoe groot is de snelheid van een punt dat zich op 15 cm van de draaias bevindt?

$$v = 5.4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Uitwerking: Voor de hoeksnelheid van de cirkelbeweging geldt dat $\omega = 2\pi \cdot f$. In dit geval is $f = \frac{350}{60\ \text{s}} =$

18.3 Herhalingsoefeningen: de 2D-beweging

$5,8$ Hz. Bijgevolg is $\omega = 2\pi \cdot 5,8 \text{ Hz} = 36\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Omdat de snelheid gelijk is aan $v = \omega \cdot r$ vinden we dat een punt op 15 cm van draaias een snelheid heeft die gelijk is aan

$$v = 36\frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,15 \text{ m} = 5,4\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.4 Herhalingsoefeningen: dynamica

Oefening 18.4.1. Een hockeypuck glijdt op ijs met een constante snelheid. Hoeveel bedraagt de nettokracht die op de puck inwerkt?

De kracht is nul.✓

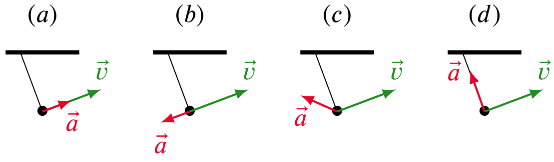
Feedback: De 1ste wet van Newton stelt: wanneer de snelheidsvector van een object blijft behouden, werkt er geen nettokracht op het object in.

Oefening 18.4.2. Je knijpt een boek tussen duim en wijsvinger vast waardoor het niet valt. Elk van de twee vingers knijpt met een kracht van $6,0$ N loodrecht op de kaft van het boek. Hoe groot mag de zwaartekracht van het boek maximaal zijn opdat het niet tussen je vingers weg zou glippen? De statische wrijvingscoëfficiënt tussen je vingers en de kaft van het boek bedraagt $0,80$.

$$G_w = 9.6 \ N$$

Uitwerking: De maximale statische wrijvingskracht als gevolg van één vinger is dus $F_w = 0,8 \cdot 6,0$ N $= 4,8$ N. Deze wrijvingskracht werkt de zwaartekracht tegen, en is dus naar boven gericht. Omdat er met 2 vingers wordt geduwd, is de totale wrijvingskracht naar boven gelijk aan 9,6 N. Omdat het boek niet in beweging is, is de som van de krachten in de verticale richting gelijk aan nul. Het boek mag dus maximaal een zwaartekracht van 9,6 N hebben, opdat de wrijvingskracht van de twee vingers het zou kunnen tegenhouden.

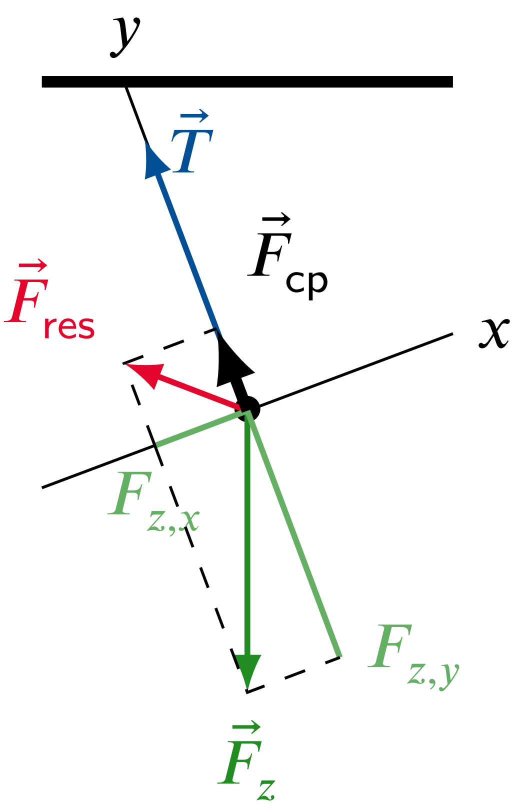
Oefening 18.4.3. Een balletje slingert in een verticaal vlak. In welk van de onderstaande figuren is de versnelling correct getekend, op het tijdstip van de getoonde snelheidsvector $\vec{v}$?



De juiste figuur is (c)✓.

Uitwerking: Antwoord (c) is juist.

18.4 Herhalingsoefeningen: dynamica



De twee krachten die op het balletje inwerken, zijn de zwaartekracht (groen), die neerwaarts gericht is en in twee componenten kan worden opgesplitst, en de spankracht van het touw (blauw), die centripetaal gericht staat. Deze leveren samen de resulterende kracht (rood) op.

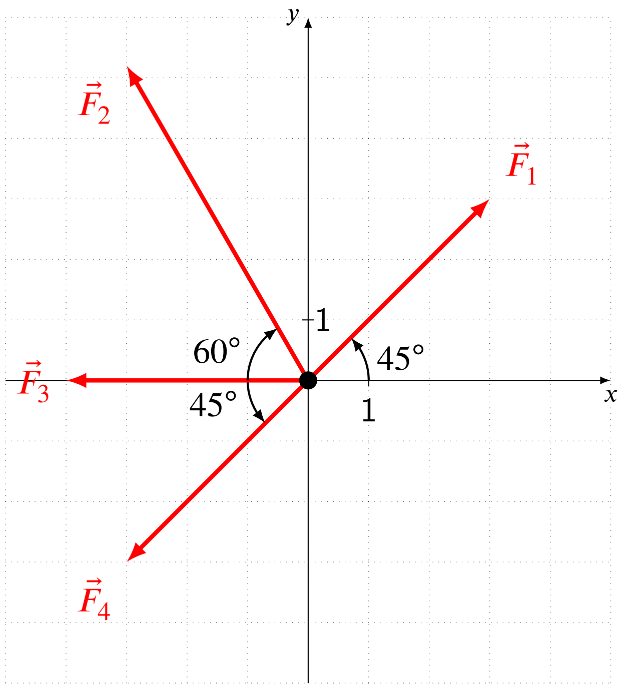
$$\vec{T} + \vec{F}_z = \vec{F}_{\text{res}},$$

Deze resulterende kracht (rood) toont, volgens de 2e wet van Newton, de richting en zin van de versnellingsvector, die een centripetale en een tangentiële component heeft. Dit wordt correct aangegeven in figuur (c).

Oefening 18.4.4. Op een voorwerp met $m = 5,0$ kg werken vier krachten, zoals weergegeven op de figuur. Er is gegeven dat $F_1 = 4,2$ N, $F_2 = 6,0$ N, $F_3 = 4,0$ N, $F_4 = 4,2$ N. Bepaal de grootte van de versnelling van het voorwerp.

CC BY-NC-SA 4.0

18.4 Herhalingsoefeningen: dynamica



$a =$ 1.7 m/s^2

Uitwerking: We bepalen eerst de componenten van de resulterende kracht ten opzichte van het gegeven assenstelsel. Op de figuur zien we dat $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_4$ tegengesteld zijn aan elkaar. De som van deze twee krachten is dus nul. We kunnen ze dus weglaten bij het bepalen van de resulterende kracht. We bepalen nu de componenten van kracht $\vec{F}_2$ en $\vec{F}_3$:

$$F_{3,x} = -4,0 \text{ N}$$
$$F_{3,y} = 0$$
$$F_{2,x} = -F_2 \cdot \cos(60°) = -6,0 \text{ N}_2 \cdot \cos(60°) = -3,0 \text{ N}$$
$$F_{2,y} = F_2 \cdot \sin(60°) = 6,0 \text{ N}_2 \cdot \sin(60°) = 5,2 \text{ N}$$

Bijgevolg geldt voor de resulterende kracht dat

$$F_x = F_{2,x} + F_{3,x} = -7,0 \text{ N}$$
$$F_y = F_{2,y} + F_{3,y} = 5,2 \text{ N}$$

en voor de versnelling

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{-7,0 \text{ N}}{5,0 \text{ kg}} = -1,4 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$
$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{5,2 \text{ N}}{5,0 \text{ kg}} = -1,0 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

De versnelling van de massa is dan gelijk aan $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 1,7 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Oefening 18.4.5. Bepaal de verhouding van de zwaarteveldsterkte op Mars tot de zwaarteveldsterkte op Aarde. Er is gegeven dat $m_{Mars} = 6,42 \cdot 10^{23}$ kg en $r_{Mars} = 3,38 \cdot 10^6$ m.

CC BY-NC-SA 4.0

18.4 Herhalingsoefeningen: dynamica

$$\frac{g_{Mars}}{g_{Aarde}} = 0.382$$

Uitwerking: De veldsterkte van het gravitatieveld in de buurt van een hemellichaam wordt gegeven door $g = G_0 \cdot \frac{m_{hemellichaam}}{(r_{hemellichaam})^2}$. Voor de Aarde is $g_{Aarde} = 9,81\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$. Voor Mars bekomen we dat

$$g_{Mars} = G_0 \cdot \frac{m_{Mars}}{(r_{Mars})^2} = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot \frac{6,42 \cdot 10^{23}\mathrm{kg}}{(3,38 \cdot 10^6\mathrm{m})^2} = 3,75\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

Bijgevolg is de verhouding

$$\frac{g_{Mars}}{g_{Aarde}} = \frac{3,75\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}}{9,81\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}} = 0,382$$

Oefening 18.4.6. Een auto met een gewicht van 15000 N vertrekt op een horizontale weg vanuit rust en versnelt tot 90 km/h in 5,0 s. De totale wrijvingskracht op de auto is 1250 N. Bepaal de kracht die de motor op de auto uitoefent.

$$F = 890 \ \cdot 10\ \mathrm{N}$$

Uitwerking: De grootte van het gewicht van een voorwerp dat zich horizontaal in rust bevindt is gelijk aan de grootte van de zwaartekracht op het voorwerp. Dus de massa van de auto is gelijk aan

$$m = \frac{F_z}{g} = \frac{15000\ \mathrm{N}}{9,81\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}} = 153 \cdot 10\ \mathrm{kg}$$

De versnelling van de auto is gelijk aan

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{90\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{5,0\ \mathrm{s}} = \frac{25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{5,0\ \mathrm{s}} = 5,0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

De resulterende kracht die op de auto werkt is bijgevolg

$$F = m \cdot a = 153 \cdot 10\ \mathrm{kg} \cdot 5,0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 765 \cdot 10\ \mathrm{N}$$

Aangezien de wrijvingskracht de beweging van de auto afremt, werkt deze de kracht van de motor tegen. Deze wrijvingskracht is dus tegengesteld gericht aan de kracht van de motor. Er geldt dus dat

$$F = F_{motor} - F_{wrijving}$$

De totale kracht die de motor uitoefent, is dus

$$F_{motor} = F + F_{wrijving} = 765 \cdot 10\ \mathrm{N} + 1250\ \mathrm{N} = 890 \cdot 10\ \mathrm{N}$$

Oefening 18.4.7. Een proton met een mass van $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg beweegt op een cirkel met een straal $r = 1,5$ m door een magneetveld met sterkte $B = 0,085$ T. Het proton heeft een lading van $Q = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C. Hoe groot is de snelheid van het proton op zijn cirkelbaan?

$$v = 12 \ \cdot 10^6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.4 Herhalingsoefeningen: dynamica

Uitwerking: De centripetale kracht op het proton dat op een cirkelvormige baan beweegt, wordt geleverd door de magnetische kracht die op de lading werkt die doorheen een magnetisch veld beweegt. Er geldt dat

$$\frac{mv^2}{r} = B \cdot |Q| \cdot v \Leftrightarrow v = \frac{B \cdot |Q| \cdot r}{m}$$

We vullen de gegevens in en bekomen dat

$$v = \frac{0,085 \text{ T} \cdot \left|1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}\right| \cdot 1,5 \text{ m}}{1,67 \cdot 10^{-27}\text{kg}} = 12 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Oefening 18.4.8. Een vrachtwagen met een massa van $m = 3800$ kg rijdt aan een snelheid van $50,4$ km/h als hij plots moet remmen. De vrachtwagen staat stil na 14 s. Hoe groot is de remkracht?

$$F = 38 \ \cdot 10^2 \text{ N}$$

Uitwerking: We veronderstellen dat de rembeweging met een constante versnelling verloopt. We kiezen de x-as mee met de beweging en schrijven voor de snelheid dat

$$v_x = v_{x,0} + a_x \cdot t$$

Uit deze vergelijking volgt voor de versnelling dat:

$$a_x = \frac{v_x - v_{x,0}}{t} = \frac{0 - 50,4 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}}{15 \text{ s}} = \frac{-14 \ \frac{\text{m}}{s}}{14 \text{ s}} = -1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Bijgevolg vinden we voor de resulterende kracht dat

$$F_x = m \cdot a_x = 3800 \ kg \cdot \left(-1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = -38 \cdot 10^2 \text{ N}$$

De resulterende kracht is gelijk aan de remkracht omdat de zwaartekracht en de normaalkracht mekaar opheffen. De x-component is negatief omdat de remkracht tegengesteld is aan de beweging. De grootte van de remkracht is $38 \cdot 10^2$ N.

Oefening 18.4.9. Een slee met een massa van $m = 40$ kg glijdt vanuit rust een besneeuwde helling af. De helling heeft een lengte van $5,0$ m en maakt een hoek van 30° met de horizontale. De dynamische wrijvingscoëfficiënt tussen de slee en de sneeuw bedraagt $\mu_d = 0,15$. Bereken de versnelling van de slee langs de helling. Bepaal hoe lang het duurt voordat de slee de voet van de helling bereikt.

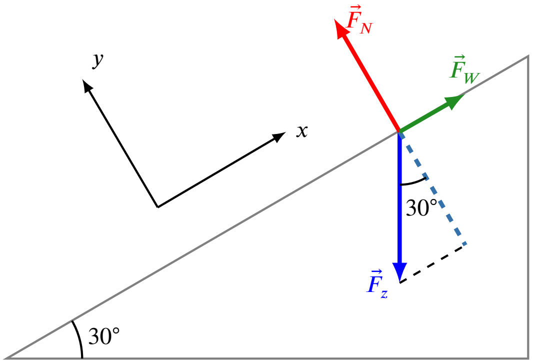
$$a = 3.6 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta t = 1.7 \text{ s}$$

Uitwerking: We tekenen eerst een vrije-lichaamdiagram met de krachten die op de slee werken: de zwaartekracht, de normaalkracht en de wrijvingskracht. We duiden het assenstelsel aan op de figuur.

CC BY-NC-SA 4.0

18.4 Herhalingsoefeningen: dynamica



De componenten van de zwaartekracht zijn:

$$F_{g,x} = -mg\sin(\alpha)$$
$$F_{g,y} = -mg\cos(\alpha)$$

De normaalkracht is even groot als de y-component van de zwaartekracht, dus $F_N = mg\cos(\alpha)$. De dynamische wrijvingskracht is bijgevolg $F_W = \mu_d F_N = \mu_d mg\cos(\alpha)$. De bewegingsvergelijking langs de helling (x-richting) is:

$$F_{g,x} + F_W = ma_x$$
$$-mg\sin(\alpha) + \mu_d mg\cos(\alpha) = ma_x$$

Delen door m geeft:

$$a_x = -g\sin(\alpha) + \mu_d g\cos(\alpha)$$
$$a_x = -(9,81\,\mathrm{m/s^2})\sin(30°) + (0,15)(9,81\,\mathrm{m/s^2})\cos(30°)$$
$$a_x = -(9,81\,\mathrm{m/s^2})(0,5) + (0,15)(9,81\,\mathrm{m/s^2})(\frac{\sqrt{3}}{2})$$
$$a_x = -4,9\,\mathrm{m/s^2} + 1,3\,\mathrm{m/s^2}$$
$$a_x = -3,6\,\mathrm{m/s^2}$$

De versnelling van de slee langs de helling is $3,6\,\mathrm{m/s^2}$.

We gebruiken de vergelijking uit de kinematica: $x = x_0 + v_{x,0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$. Met $v_{x,0} = 0$, $x_0 = 0$ en $x = 5,0\,\mathrm{m}$:

$$5,0\,\mathrm{m} = 0 \cdot t + \frac{1}{2}(3,6\,\mathrm{m/s^2})t^2$$
$$5,0\,\mathrm{m} = 1,8\,\mathrm{m/s^2} \cdot t^2$$
$$t^2 = \frac{5,0\,\mathrm{m}}{1,8\,\mathrm{m/s^2}} \approx 2,8\,\mathrm{s^2}$$
$$t = \sqrt{2,8\,\mathrm{s^2}} \approx 1,7\,\mathrm{s}$$

Het duurt $1,7$ seconden voordat de slee de voet van de helling bereikt.

Oefening 18.4.10. Een skiër met massa $m = 65$ kg glijdt langs een wrijvingsloze helling naar beneden. De helling maakt een hoek θ van 22° met de horizontale.

1. Bepaal de richting en grootte van de resulterende kracht op de skiër (rond af zonder komma).

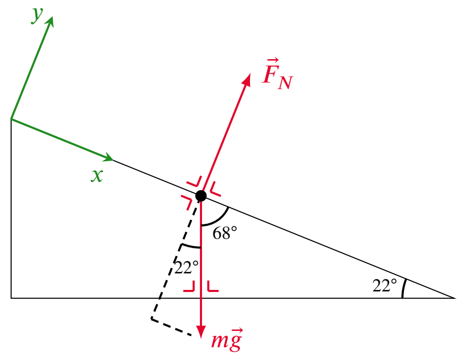
$$\vec{F}_{\text{net}} = (240\ ;\ 0)\ N$$
$$F_{\text{net}} = 240\ N$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.4 Herhalingsoefeningen: dynamica

2. Als de helling steiler wordt, dan wordt de resulterende kracht groter✓ . . Verklaar.

Uitwerking: Het krachtendiagramma van de skiër is:



$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_N + m\vec{g} = \vec{F}_N + \vec{W}$$

waarbij

$$\begin{aligned}\vec{F}_N &= (0, F_N)\\ \vec{W} &= (W\sin\theta,\ -W\cos\theta)\\ &= (mg\sin\theta,\ -mg\cos\theta)\end{aligned}$$

Omdat de skiër skiet langs de helling, is $a_y = 0$. Dit impliceert:

$$\begin{aligned}& F_{N,y} + W_y = ma_y = 0\\ \Rightarrow\ & F_N - mg\cos\theta = 0\\ \Rightarrow\ & F_N = mg\cos\theta\end{aligned}$$

De nettokracht op de skiër is dus

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{net}} &= (0 + mg\sin\theta,\ F_N - mg\cos\theta)\\ &= (mg\sin\theta,\ 0)\\ &\approx (240,\ 0)N\end{aligned}$$

De grootte van $\vec{F}_{\text{net}}$ is $mg\sin\theta$ en deze kracht werkt in de x-richting (volgens de helling en naar beneden):

$$F_{\text{net}} = ||\vec{F}_{\text{net}}|| = mg\sin\theta.$$

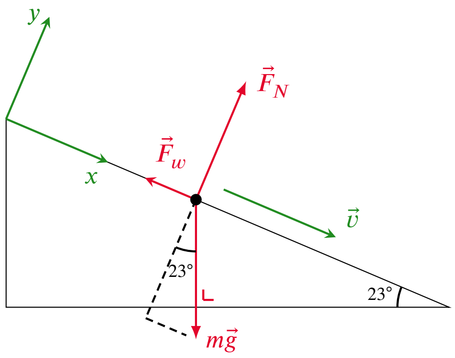
Als θ stijgt, stijgt ook $\sin\theta$. Bijgevolg vergroot de nettokracht als de helling steiler wordt.

Oefening 18.4.11. Een zeeleeuw schuift vanuit rust langs een helling naar beneden. De helling is 3.0 m lang en maakt een hoek van 23° boven de horizontale. Als de dynamische wrijvingscoëfficïent tussen de zeeleeuw en de helling 0,26 is, hoe lang duurt het dan tot de zeeleeuw in het water belandt? $\Delta t = 2.0\,\text{s}$

Uitwerking: Het krachtendiagramma van de zeeleeuw:

CC BY-NC-SA 4.0

18.4 Herhalingsoefeningen: dynamica



$$x: \quad -f_k + mg\sin\theta = ma_x \qquad (1)$$
$$y: \quad F_N - mg\cos\theta = ma_y = 0 \qquad (2)$$

Uit (2) volgt dat $F_N = mg\cos\theta$. Omdat $F_w = \mu_k F_N$, volgt uit (1) dat

$$-\mu_k F_N + mg\sin\theta = ma_x.$$

Vullen we $F_N = mg\cos\theta$ hierin in:

$$\begin{aligned} & -\mu_k mg\cos\theta + mg\sin\theta = ma_x \\ \Rightarrow \quad & -\mu_k g\cos\theta + g\sin\theta = a_x \\ \Rightarrow \quad & a_x = g(\sin\theta - \mu_k g\cos\theta) = \text{cte}. \end{aligned}$$

Omdat a_x constant is, is de beweging eenparig versneld, en halen we uit de formules van kinematica dat:

$$x(t) = 0 + v_{0,x}t + \frac{a_x}{2}t^2.$$

De zeeleeuw begint in de oorsprong van het assenstelsel vanuit rust, dus:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ v_{0,x} = 0 \end{cases}$$

Dan is

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_x}{2}t^2 \\ &= \frac{g}{2}(\sin\theta - \mu_k g\cos\theta)t^2 \\ &\approx 0,74t^2 \end{aligned}$$

Wanneer de zeeleeuw net in het water belandt, is $x = 3,0$ m. Noem het tijdstip waarop dit gebeurt t^*. Dan geldt:

$$\begin{aligned} & 3,0\text{ m} = x(t^*) \approx 0,74\,(t^*)^2 \\ \Rightarrow \quad & t^* \approx \pm\sqrt{\frac{3,0}{0,74}}. \end{aligned}$$

Een bijkomende voorwaarde is dat $t^* \geq 0$. Dus het antwoord is:

$$t^* \approx +\sqrt{\frac{3,0}{0,74}} \approx 2,0\text{ s}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.4 Herhalingsoefeningen: dynamica

Oefening 18.4.12. Een kleine bal met een massa van $m = 0,50\,\text{kg}$ is bevestigd aan het uiteinde van een licht, onrekbaar touw met een lengte van $r = 1,2\,\text{m}$. Het andere uiteinde van het touw is vastgemaakt aan een vast punt op een wrijvingsloze horizontale tafel. De bal wordt in een horizontale cirkelbaan gebracht met een constante snelheid van $v = 3,0\,\text{m/s}$. Bereken de grootte van de spankracht in het touw.

$$F_T = 3.8\ \text{N}$$

Uitwerking: De resulterende kracht is de centripetale kracht F_{cp}:

$$F_{cp} = \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{(0,50\,\text{kg}) \cdot \left(3,0\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{1,2\,\text{m}} = 3,8\,\text{N}$$

De richting van de centripetale kracht is horizontaal en gericht naar het middelpunt van de cirkelbaan, dus naar het vaste punt waar het touw is bevestigd. In de horizontale richting is de spankracht de enige kracht die de centripetale kracht levert:

$$F_T = F_{cp} = 3,8\,\text{N}$$

De grootte van de spankracht in het touw is dus 3,8 N.

Oefening 18.4.13. Een massa $m = 0,25\,\text{kg}$ draait aan het uiteinde van een massaloos touwtje in een cirkel over een horizontale tafel. De wrijving kan verwaarloosd worden. De lengte van het touw is $L = 0,50\,\text{m}$. Het touwtje kan in verticale positie en in rust maximaal een massa van $M = 50\,\text{kg}$ dragen zonder te breken. Wat is de maximale snelheid waarmee m kan draaien zonder dat het touwtje breekt?

$$v = 3.8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Uitwerking: De centripetale kracht die op de massa werkt kan maximaal gelijk zijn aan $M \cdot g$. Hieruit volgt dat

$$Mg = \frac{m \cdot v^2}{L}$$
$$v = \sqrt{\frac{LMg}{m}}$$
$$v = \sqrt{\frac{0,50\ \text{m} \cdot 50\ \text{kg} \cdot 9,81\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}}{0,25\ \text{kg}}} = 31\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

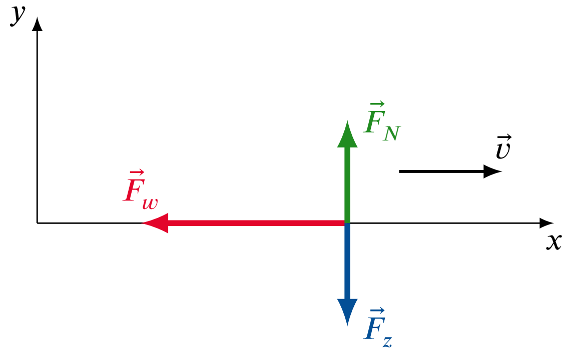
De maximale snelheid is $31\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Oefening 18.4.14. Je schuift een zoutvat naar de andere kant van de tafel en geeft het een initïele snelheid van 1.15 m/s . Het zoutvat vertraagt en komt tot rust na 0.840 m. Wat is de dynamische wrijvingscoëfficïent tussen het zoutvat en de tafel?

Uitwerking: Het krachtendiagramma van het zoutvat is

CC BY-NC-SA 4.0

18.4 Herhalingsoefeningen: dynamica



Met de tweede wet van Newton vinden we voor de x- en y-richting

$$\begin{aligned} ma_x &= -F_w\,, \\ 0 &= F_N - mg\,. \end{aligned}$$

Hier is m de massa van het zoutvat. Uit de tweede vergelijking halen we dat $F_N = mg$, en als we gebruiken dat $F_w = \mu F_N$, vinden we dat

$$a_x = -\frac{F_w}{m} = -\frac{\mu F_N}{m} = -\mu g\,.$$

Merk op dat dit een constante is omdat zowel de kinetische wrijvingscoëfficiënt als de valversnelling constant zijn. De kinematische vergelijkingen voor een constante versnelling zijn

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + a_x t\,, \\ x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{a_x}{2} t^2\,. \end{aligned}$$

Stel t^* het tijdstip waarop het zoutvat tot rust komt. Dan geldt

$$0 = v(t^*) = v_0 + a_x t^*\,,$$

waaruit we halen dat $t^* = -\frac{v_0}{a_x} = \frac{v_0}{\mu g}$. Anderzijds weten we ook dat $0.840 = x(t^*)$. Zo vinden we dat

$$\begin{aligned} 0.840 &= x_0 + \frac{v_0^2}{\mu g} - \frac{\mu g}{2}\left(\frac{v_0}{\mu g}\right)^2 \\ &= 0 + \frac{v_0^2}{\mu g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu g} \\ &= \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu g}\,. \end{aligned}$$

Zo vinden we dat

$$\mu = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{0.840 \cdot g} \approx 0.0802\,.$$

Oefening 18.4.15. Een verkeerslicht met een gewicht van $G = 120\,\mathrm{N}$ hangt boven een kruispunt aan twee lichte kabels. De eerste kabel maakt een hoek van $\alpha = 30°$ met de horizontale, en de tweede kabel maakt een hoek van $\beta = 45°$ met de horizontale. Beide kabels zijn aan een vast punt bevestigd. Bereken de grootte van de beide spankrachten.

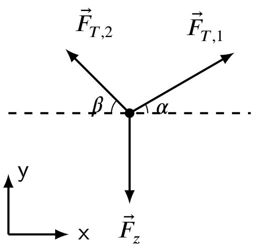
$$F_{T,1} = 88\ \mathrm{N}$$

$$F_{T,2} = 108\ \mathrm{N}$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.4 Herhalingsoefeningen: dynamica

Uitwerking: We tekenen eerst een vrije-lichaamdiagram met daarop de krachten die op het verkeerslicht werken:



We ontbinden de spankrachten in hun horizontale en verticale componenten volgens de gekozen assen.

Voor de eerste spankracht:

$$F_{T,1,x} = F_{T,1}\cos(\alpha) = F_{T,1}\cos(30°)$$
$$F_{T,1,y} = F_{T,1}\sin(\alpha) = F_{T,1}\sin(30°)$$

Voor de tweede spankracht:

$$F_{T,2,x} = -F_{T,2}\cos(\beta) = -F_{T,2}\cos(45°) \quad \text{(negatief omdat de kracht naar links wijst)}$$
$$F_{T,2,y} = F_{T,2}\sin(\beta) = F_{T,2}\sin(45°)$$

We schrijven nu de de tweede wet van Newton in de x- en de y-richting:

x-richting:

$$\sum F_x = F_{T,1,x} + F_{T,2,x} = F_{T,1}\cos(30°) - F_{T,2}\cos(45°) = 0 \quad (1)$$

y-richting:

$$\sum F_y = F_{T,1,y} + F_{T,2,y} - F_z = F_{T,1}\sin(30°) + F_{T,2}\sin(45°) - F_z = 0 \quad (2)$$

We bekomen een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden ($F_{T,1}$ en $F_{T,2}$). We lossen dit op. Uit vergelijking (1):

$$F_{T,1}\cos(30°) = F_{T,2}\cos(45°)$$
$$F_{T,1} = F_{T,2}\frac{\cos(45°)}{\cos(30°)} = F_{T,2}\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2} = F_{T,2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Substitueer deze uitdrukking voor $F_{T,1}$ in vergelijking (2):

$$\left(F_{T,2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\sin(30°) + F_{T,2}\sin(45°) - F_z = 0$$
$$F_{T,2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = F_z$$
$$F_{T,2}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}\right) = F_z$$
$$F_{T,2} = F_z\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = 120\,\text{N}\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$$
$$F_{T,2} \approx 108\,\text{N}$$

Nu berekenen we $F_{T,1}$:

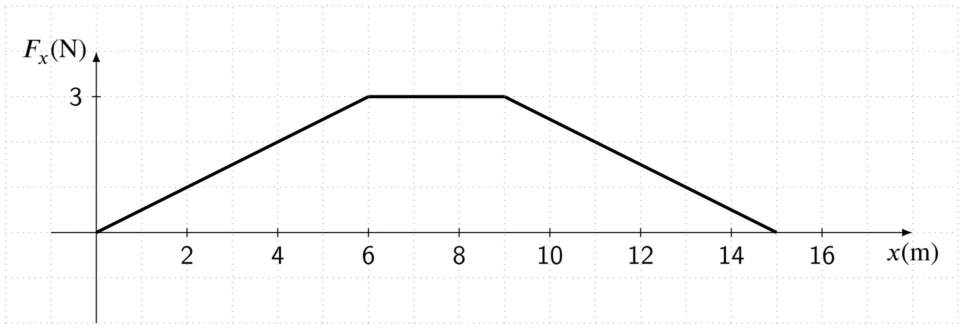
$$F_{T,1} = F_{T,2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 108\,\text{N}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 88\,\text{N}$$

De grootte van de spankracht $F_{T,1}$ is 88 N. De grootte van de spankracht $F_{T,2}$ is 108 N.

CC BY-NC-SA 4.0

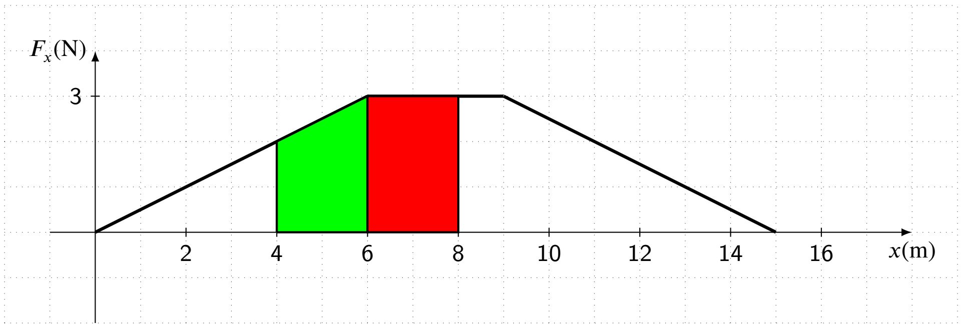
18.5 Herhalingsoefeningen: arbeid en energie

Oefening 18.5.1. Een deeltje is onderworpen aan een kracht $\vec{F}$ die varieert met de positie x. De figuur geeft aan hoe F_x afhangt van x. Bereken de arbeid die de kracht verricht tijdens de verplaatsig van $x = 4$ m tot $x = 8$ m.



$$W = 11 \text{ J}$$

Uitwerking: Omdat het deeltje zich enkel in de x-richting verplaatst, moeten we bij de berekening van de arbeid enkel rekening houden met de x-component van de kracht, die weergegeven is op de figuur. De arbeid die de kracht verricht stemt overeen met de oppervlakte onder de curve tussen $x = 4$ m en $x = 8$ m. We beschouwen die oppervlakte als een som van de oppervlakte van een trapezium en een rechthoek.



De arbeid die de kracht verricht is dus gelijk aan

$$W = (2 \text{ N} + 3 \text{ N}) \frac{2 \text{ m}}{2} + 3 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} = 11 \text{ J}$$

Oefening 18.5.2. Een blok van 7,0 kg wordt vanuit rust over een wrijvingsloos oppervlak geduwd door een constante horizontale kracht van 10 N. Bepaal de snelheid van het blok nadat het een afstand van 5,6 m heeft afgelegd.

$$v = 4.0 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Uitwerking: Er werken drie krachten op het blok: zwaartekracht, normaalkracht en de duwkracht. Omdat de zwaartekracht en de normaalkracht samen nul zijn, is de resulterende kracht gelijk aan de duwkracht.

CC BY-NC-SA 4.0

18.5 Herhalingsoefeningen: arbeid en energie

Omdat deze resulterende kracht constant is, is de arbeid die deze resulterende kracht verricht gelijk aan

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \|\Delta\vec{r}\| \cdot \cos\phi = 10\ \mathrm{N} \cdot 5{,}6\ \mathrm{m} \cdot \cos 0° = 56\ \mathrm{J}$$

De arbeid die de resulterende kracht verricht is gelijk aan de verandering van de kinetische energie

$$\begin{aligned} & W = \Delta E_k \\ \Leftrightarrow\ & W = E_k(2) - E_k(1) \\ \Leftrightarrow\ & W = \frac{mv^2}{2} - 0 \\ \Leftrightarrow\ & W = \frac{mv^2}{2} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 56\,\mathrm{J}}{7{,}0\ \mathrm{kg}}} = 4{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Na 5,6 m is de snelheid van het blok $4{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Oefening 18.5.3. Een kracht $\vec{F} = 5x \cdot \vec{e}_x + 3y \cdot \vec{e}_y$ werkt in op een deeltje terwijl dit deeltje beweegt langs de x-as van de oorsprong naar $x = 4{,}0$ m. Hoe groot is de arbeid die deze kracht op het deeltje verricht tijdens deze verplaatsing?

$$W = 40\ \mathrm{J}$$

Uitwerking: Aangezien de kracht niet constant blijft tijdens de verplaatsing en de verplaatsing enkel in de x-richting gebeurt, kan je de verrichte arbeid schrijven als:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_0^4 5x dx = \left[5\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 40\ \mathrm{J}$$

Oefening 18.5.4. Een voorwerp met een massa van $1{,}50$ kg hangt aan een lichte veer, die voldoet aan de wet van Hooke. De veer is $2{,}50$ cm uitgerekt. Je neemt het voorwerp nu weg van de veer en hangt er een nieuw voorwerp aan met een massa van $4{,}50$ kg. Hoe ver rekt de veer nu uit? Hoeveel arbeid moet je verrichten om de veer nog $4{,}0$ cm extra uit te rekken?

$$\Delta\ell = 7.5\ \mathrm{cm}$$

$$W = 2.2\ \mathrm{J}$$

Uitwerking: We bepalen eerst de veerconstante. We weten dat de veer $2{,}50$ cm uitrekt als er een massa

CC BY-NC-SA 4.0

18.5 Herhalingsoefeningen: arbeid en energie

van $1,50$ kg aan hangt. Er geldt dat

$$\begin{aligned} &F_v = k \cdot \Delta\ell \\ &\Leftrightarrow m \cdot g = k \cdot \Delta\ell \\ &\Leftrightarrow k = \frac{mg}{\Delta\ell} \\ &\Leftrightarrow k = \frac{1,50 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}}{0,0250 \text{ m}} = 589 \frac{\text{N}}{\text{m}} \end{aligned}$$

We kunnen nu de uitrekking bepalen als de massa vervangen wordt door een massa van $4,50$ kg:

$$\begin{aligned} &F_v = m \cdot g \\ &\Leftrightarrow k \cdot \Delta\ell = m \cdot g \\ &\Leftrightarrow \Delta\ell = \frac{mg}{k} \\ &\Leftrightarrow \Delta\ell = \frac{4,50 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}}{589 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0,0750 \text{ m} \end{aligned}$$

Door de massa drie keer groter te maken, wordt de uitrekking dus drie keer langer.

De potentiële energie van de veer bij die lengte is gelijk aan:

$$E_{p,1} = \frac{k \cdot (\Delta\ell)^2}{2} = \frac{589 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,075 \text{ m})^2}{2} = 1,7 \text{ J}$$

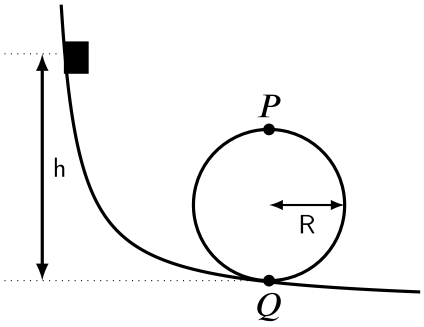
Rekken we de veer nog extra uit over een lengte van $4,0$ cm, wordt de totale uitrekking $11,5$ cm. De bijhorende potentiële energie is dan:

$$E_{p,2} = \frac{k \cdot (\Delta\ell)^2}{2} = \frac{589 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,115 \text{ m})^2}{2} = 3,9 \text{ J}$$

De arbeid die je moet verrichten om deze uitrekking mogelijk te maken is gelijk aan het verschil in potentiële energie:

$$W = 3,9 \text{ J} - 1,7 \text{ J} = 2,2 \text{ J}$$

Oefening 18.5.5. Een voorwerp met massa $m = 5,00$ g glijdt over een wrijvingsloze baan naar beneden en komt in een 'loop' terecht, zoals weergegeven op de figuur. Het voorwerp wordt losgelaten van een hoogte $h = 3,0R$. Wat is de snelheid van het voorwerp in het punt P? Er is gegeven dat $R = 15,0$ cm.



$$v = 1.7 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

CC BY-NC-SA 4.0

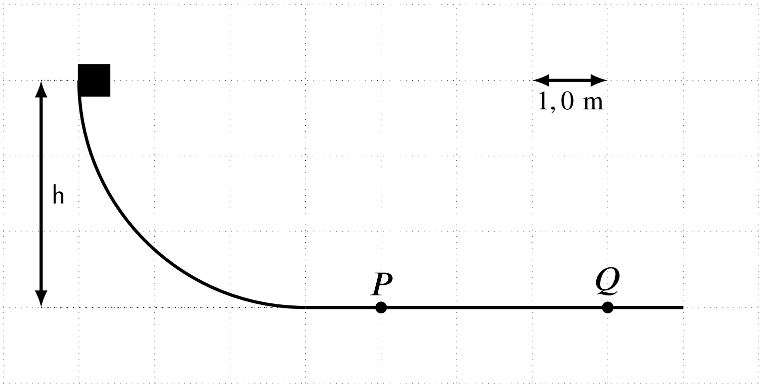
18.5 Herhalingsoefeningen: arbeid en energie

Uitwerking: Wegens behoud van mechanische energie is de mechanische energie in het vertrekpunt (punt 1) gelijk aan de mechanische energie van het voorwerp in punt P (punt 2).

$$E_p(1) = E_p(2) + E_k(2)$$
$$\Leftrightarrow mg \cdot 3R = mg \cdot 2R + \frac{mv^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2gR = v^2$$
$$\Leftrightarrow v = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,15\ \text{m}} = 1,7\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

De snelheid van het voorwerp in punt P is $1,7\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Oefening 18.5.6. Een blok met een massa van 10,0 kg wordt vanuit rust van op hoogte h losgelaten. Het pad is wrijvingsloos behalve tussen de punten P en Q. De snelheid van het blok in punt Q is $6,5\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Bepaal de dynamische wrijvingscoëfficiënt tussen het blok en het oppervlak tussen P en Q.



$$\mu_d = 0.29$$

Uitwerking: Wegens behoud van mechanische energie tussen het startpunt en punt P, is de mechanische energie in het vertrekpunt gelijk aan de mechanische energie van het voorwerp in punt P. We duiden het vertrekpunt aan met (1) en punt P met (2).

$$E_p(1) = E_k(2)$$
$$\Leftrightarrow mg \cdot h = \frac{mv^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3,0\ \text{m}} = 7,7\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

De snelheid van het voorwerp in punt P is $7,7\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Tussen de punten P en Q is de arbeid die de wrijving verricht gelijk aan de verandering van de mechanische

CC BY-NC-SA 4.0

energie, in dit geval dus gelijk aan de verandering van de kinetische energie. We duiden punt Q aan met (3).

$$\begin{aligned}
&W_{WR} = E_k(3) - E_k(2)\\
&\Leftrightarrow -F_{WR} \cdot \Delta x = \frac{mv_3^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}\\
&\Leftrightarrow -\mu_d \cdot F_N \cdot \Delta x = \frac{mv_3^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}\\
&\Leftrightarrow -\mu_d \cdot mg \cdot \Delta x = \frac{mv_3^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}\\
&\Leftrightarrow \mu_d = \frac{1}{2 \cdot g \cdot \Delta x}\left(v_2^2 - v_3^2\right)\\
&\Leftrightarrow \mu_d = \frac{1}{2 \cdot 9,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3,0\ \text{m}}\left(\left(7,7\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(6,5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2\right)\\
&\Leftrightarrow \mu_d = 0,29
\end{aligned}$$

De dynamische wrijvingcoëfficiënt is 0,29.

Oefening 18.5.7. Een massa van $1,5$ kg hangt aan een veer op een horizontale tafel. De veer heeft in rust een lengte van $0,30$ m en een veerconstante van $75\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Je duwt nu tegen de massa zodat de veer 10 cm is ingedukt. Je laat dan de massa los, zodat die begint te trillen. Hoe groot is de snelheid van de massa wanneer die het evenwichtspunt passeert? De wrijving mag verwaarloosd worden.

$$v = 0,71\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Uitwerking: Wegens behoud van mechanische energie tussen het startpunt en het evenwichtspunt, is de mechanische energie in het vertrekpunt gelijk aan de mechanische energie van het voorwerp in het evenwichtspunt. Omdat de veer niet uitgerekt is in het evenwichtspunt, is de elastische potentiële energie op dat ogenblik gelijk aan nul.

We duiden het vertrekpunt aan met (1) en het evenwichtspunt met (2). Er geldt dan dat

$$\begin{aligned}
&E_p(1) = E_k(2)\\
&\Leftrightarrow \frac{k \cdot (\Delta \ell)^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\\
&\Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{k \cdot (\Delta \ell)^2}{m}}\\
&\Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{75\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,10\ \text{m})^2}{1,5\ \text{kg}}} = 0,71\frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}$$

De snelheid van het voorwerp in het evenwichtspunt is $0,71\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Oefening 18.5.8. In een eerste situatie heeft een bal met massa m die naar beneden valt op hoogte h een snelheid v. Op dat ogenblik is de kinetische energie van de bal gelijk aan de potentiële energie van de bal. Wanneer diezelfde bal in een tweede situatie op hoogte h/2 een snelheid 2v heeft, wat kan je dan zeggen over de mechanische energie van de bal in die twee situaties?

Meerkeuze:

CC BY-NC-SA 4.0

18.5 Herhalingsoefeningen: arbeid en energie

(a) $E_{mech}(1) = E_{mech}(2)$

(b) $E_{mech}(1) < E_{mech}(2)$ ✓

(c) $E_{mech}(1) > E_{mech}(2)$

(d) Er zijn te weinig gegevens om een uitspraak te kunnen doen.

Uitwerking: De totale energie van de bal in situatie 1 is gelijk aan $E_{mech}(1) = mgh + \frac{mv^2}{2}$. Omdat gegeven is dat de kinetische energie in die situatie gelijk is aan de potentiële energie kan je schrijven dat

$$E_{mech}(1) = 2mgh$$

In de tweede situatie is de totale energie van de bal gelijk aan

$$E_{mech}(2) = mg\frac{h}{2} + \frac{m(2v)^2}{2} = mg\frac{h}{2} + 4\frac{mv^2}{2}$$

Voor de eerste situatie is gegeven dat $\frac{mv^2}{2} = mgh$, zodat we ook kunnen stellen dat

$$E_{mech}(2) = mg\frac{h}{2} + 4mgh = \frac{9}{2}mgh$$

De mechanische energie van de bal is in de tweede situatie dus groter dan die in de eerste.

Oefening 18.5.9. Een deeltje met een massa van $2,5$ kg beweegt volgens de x-as. Zijn positie verandert in de tijd volgens $x = t + 3,0 \cdot t^2$. Bepaal de arbeid die uitgeoefend wordt op het deeltje tussen $t = 1,00$ s en $t = 2,00$ s.

$$W = 15 \quad \cdot 10 \text{ J}$$

Uitwerking: De x-component van de resulterende kracht op het deeltje is gegeven door $F_x = m \cdot a_x = m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2}$. We bepalen dus de tweede afgeleide van de x(t) functie:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}(1 + 6,0 \cdot t) = 6,0$$

Hieruit volgt dat

$$F_x = 2,5 \text{ kg} \cdot 6,0\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 15 \text{ N}$$

Aangezien deze kracht constant blijft tijdens de verplaatsing, vinden we de arbeid:

$$W = F_x \cdot \Delta x$$
$$\Leftrightarrow W = F_x \cdot (x(2,00 \text{ s}) - x(1,00 \text{ s}))$$
$$\Leftrightarrow W = 15 \text{ N} \cdot (14 \text{ m} - 4,0 \text{ m}) = 15 \cdot 10 \text{ J}$$

De arbeid die de resulterende kracht verricht is gelijk aan $15 \cdot 10$ J.

Merk op dat je de arbeid ook zou kunnen berekenen door te stellen dat de arbeid die de resulterende kracht verricht, gelijk is aan de verandering van de kinetische energie. De snelheidsfunctie is immers gelijk aan $\frac{d}{dt}\left(t + 3,0 \cdot t^2\right) = 1 + 6,0 \cdot t$. Je kan nu de snelheid en dus ook de kinetische energie bepalen in het start- en eindpunt. Zo bekom je dat

$$W = \Delta E_k = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot \left(v_2^2 - v_1^2\right) = \frac{2,5 \text{ kg}}{2}\left(\left(13\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(7\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2\right) = 15 \cdot 10 \text{ J}$$

18.5 Herhalingsoefeningen: arbeid en energie

Oefening 18.5.10. Een massa m trilt aan een veer met veerconstante k met een amplitude A. Welke percentage van de mechanische energie van de massa is kinetische energie op het ogenblik dat de uitwijking gelijk is aan $A/2$?

$$percentage = 75\ \%$$

Uitwerking: De mechanische energie van een massa die een harmonische trilling uitvoert is gelijk aan $E_{mech} = \frac{k \cdot A^2}{2}$. Anderzijds is die mechanische energie gelijk aan de som van de potentiële en kinetische energie:

$$E_{mech} = \frac{k \cdot (\Delta \ell)^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

Wanneer de uitwijking gelijk is aan A/2, geldt dus dat

$$\begin{aligned} \frac{k \cdot A^2}{2} &= \frac{k \cdot \left(\frac{A}{2}\right)^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{k \cdot {A^2}^{2}}{2} &= \frac{1}{4}\frac{k \cdot A^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4}\frac{k \cdot {A^2}^{2}}{2} &= \frac{mv^2}{2} \end{aligned}$$

Op het ogenblik dat de uitwijking A/2 is, is de kinetische energie gelijk aan 3/4 van de totale mechanische energie. Dat is 75 %.

18.6 Herhalingsoefeningen: trillingen

Oefening 18.6.1. Een lange stalen bladveer is onderaan vast gemaakt aan een tafel. Bovenaan is een bol bevestigd van 7,50 kg. Om de bol 15,0 cm naar rechts te trekken is een kracht van 4,50 N nodig. Bepaal de periode waarmee de bol zal trillen als je er een duwtje tegen geeft.

$$T = 3.14 \text{ s}$$

Uitwerking: We passen de wet van Hooke toe om de veerconstante te bepalen

$$F_v = k \cdot \Delta\ell \Rightarrow k = \frac{F_v}{\Delta\ell} = \frac{4,50 \text{ N}}{0,150 \text{ m}} = 30,0 \ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

De periode van de trilling wordt gegeven door $T = \frac{1}{f}$ met de frequentie gelijk aan $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Bijgevolg is

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{30 \ \frac{\text{N}}{\text{m}}}{7,50 \text{ kg}}} = \frac{1}{\pi}\text{Hz} \Rightarrow T = \pi \ s$$

De periode van trilling is gelijk aan $3,14$ s.

Oefening 18.6.2. Als je bij een harmonische trilling de amplitude verdubbelt, wat zal er dan gebeuren? Welke uitspraak is juist?

Meerkeuze:

(a) De maximale potentiële energie van het systeem niet veranderen.

(b) De maximale potentiële energie van het systeem verdubbelen.

(c) De maximale kinetische energie van het systeem verdubbelen.

(d) De maximale kinetische energie van het systeem verviervoudigen. ✓

Uitwerking: Beschouw de trillingsvergelijking van een enkelvoudige harmonische trilling:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Neem je hier de afgeleide van, dan bekom je

$$v_x(t) = A\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

De maximale snelheid is dus gelijk aan $v_x = A\omega$.

Verdubbel je de amplitude, dan zal de maximale snelheid verdubbelen. Daardoor zal de maximale kinetische energie verviervoudigen, want $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$

Oefening 18.6.3. Een voorwerp met een massa van 1,50 kg hangt aan een veer. Je rekt de veer nu 4,50 cm uit en laat het voorwerp dan vrij trillen. Het schommelt dan 1 keer heen en weer per seconde. Hoe groot is de veerconstante van de veer?

$$k = 59.2 \ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.6 Herhalingsoefeningen: trillingen

Uitwerking: De frequentie van de trilling wordt gegeven door $f = \frac{1}{T} = 1$ Hz. Uit de formule voor de eigenfrequentie

$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ volgt dat $k = (2\pi f)^2 \cdot m$. Bijgevolg is

$$k = (2\pi \cdot 1\ \mathrm{Hz})^2 \cdot 1,50\,\mathrm{kg} = 59,2\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

De veerconstante van de veer is gelijk aan $59,2\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ s.

Oefening 18.6.4. De trillingsvergelijking van een harmonische trilling is

$$x(t) = 15\ sin(6\pi\ t + 4)$$

Wat is de frequentie van deze trilling?

$$f = 3\ \mathrm{Hz}$$

Uitwerking: De pulsatie van de trilling is gelijk aan 6π. Er geldt dat $\omega = 2\pi f$. Hieruit volgt dat $f = \frac{\omega}{2\pi}$ en dus

$$f = \frac{6\pi}{2\pi}\mathrm{Hz} = 3\ \mathrm{Hz}$$

De frequentie van de trilling is 3 Hz.

Oefening 18.6.5. Aan een verticaal opgehangen veer hangt een massa van 300 g. Men hangt nu nog 500 g extra bij aan deze veer. Daardoor rekt de veer 12,0 cm langer uit. Nu laat men de massa's op en neer trillen. Hoe groot is de frequentie van deze trilling?

$$f = 1.1\ \mathrm{Hz}$$

Uitwerking: De frequentie kunnen we bepalen met de formule voor de eigenfrequentie

$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ van een veer.

De massa is gelijk aan de som van de massa's, dus 0,800 kg. We moeten nu nog k bepalen.

We noemen x de uitrekking van de veer wanneer ze belast is met een massa van 0,300 kg. Er geldt dat

$$F_v = k \cdot x \Rightarrow m \cdot g = k \cdot x \Rightarrow 0,300\ \mathrm{kg} \cdot g = k \cdot x$$

Voegen we nu 0,500 kg toe, dan geldt dat

$$0,800\ \mathrm{kg} \cdot g = k \cdot (x + 0,12\ \mathrm{m})$$

Bijgevolg is

$$\begin{aligned}
&0,800\ \mathrm{kg} \cdot g = k \cdot x + k \cdot 0,12\ \mathrm{m} \\
\Leftrightarrow\ &0,800\ \mathrm{kg} \cdot g = 0,300\ \mathrm{kg} \cdot g + k \cdot 0,12\ \mathrm{m} \\
\Leftrightarrow\ &0,500\ \mathrm{kg} \cdot g = k \cdot 0,12\ \mathrm{m} \\
\Leftrightarrow\ &k = \frac{0,500\ \mathrm{kg} \cdot 9,81\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}}{0,12\ \mathrm{m}} = 41\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}
\end{aligned}$$

18.6 Herhalingsoefeningen: trillingen

De veerconstante van de veer is gelijk aan $41\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. We vullen deze waarde in de formule voor de eigenfrequentie en bekomen dat $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{41\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{0,800\ \mathrm{kg}}} = 1,1\ \mathrm{Hz}$

De frequentie van de trilling is 1,1 Hz.

Oefening 18.6.6. Een stemvork trilt met een frequentie van 440 Hz. De amplitude van de uiteinden van de stemvork is 0,4 mm. Hoe groot is de snelheid van zo'n uiteinde wanneer die door zijn evenwichtsstand gaat?

$$v = 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Uitwerking: De snelheid die een object heeft dat een harmonische trilling uitvoert op het ogenblik dat dit door het evenwichtspunt gaat, is gelijk aan de maximale snelheid. De waarde hiervan is gelijk aan

$$v_{max} = A \cdot \omega$$

De amplitude is gegeven en de frequentie kunnen we omrekenen naar de pulsatie:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 440\ \mathrm{Hz} = 276 \cdot 10\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Hieruit volgt dat

$$v_{\mathrm{max}} = 0,4 \cdot 10^{-3}\mathrm{m} \cdot 276 \cdot 10\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

De snelheid van het uiteinde wanneer dit door z'n evenwichtsstand gaat is 1 m/s.

Oefening 18.6.7. Een lichte veer rekt 12,0 cm uit als je er een massa van 100 g aan hangt. Je trekt nu aan de massa zodat ze 15,0 cm uit de evenwichtsstand is verwijderd en laat ze dan los. Met welke snelheid gaat de massa door de evenwichtsstand?

$$v = 1.4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Uitwerking: De snelheid die een massa heeft die een harmonische trilling uitvoert op het ogenblik dat deze door het evenwichtspunt gaat, is gelijk aan de maximale snelheid. De waarde hiervan is gelijk aan

$$v_{max} = A \cdot \omega$$

De amplitude is gelijk aan de maximale uitrekking van 0,150 m. De pulsatie kunnen we berekenen via de frequentie. De frequentie kunnen we bepalen via de formule van de eigenfrequentie $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ van een veer. Er geldt dan dat

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

We bepalen nu de veerconstante. Er geldt dat

$$F_v = k \cdot \Delta\ell \Rightarrow m \cdot g = k \cdot \Delta\ell \Rightarrow k = \frac{mg}{\Delta\ell} = \frac{0,100\ \mathrm{kg} \cdot 9,81\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}}{0,120\ \mathrm{m}} = 8,2\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

18.6 Herhalingsoefeningen: trillingen

Hieruit volgt dat

$$\omega = \sqrt{\frac{8,2\ \frac{\text{N}}{\text{m}}}{0,100\ \text{kg}}} = 9,1\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

en dus

$$v_{\text{max}} = 0,150\ \text{m} \cdot 9,1\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 1,4\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

De snelheid van de massa wanneer die door z'n evenwichtsstand gaat is 1,4 m/s.

Oefening 18.6.8. Een massa m voert een harmonische trilling uit met periode T, terwijl de massa aan een veer hangt. Je maakt de massa nu vier keer zo zwaar en je trekt de veer dubbel zo ver uit haar evenwichtsstand. Hoe verandert de periode?

Meerkeuze:

(a) De periode halveert.

(b) De periode verdubbelt. ✓

(c) De periode verviervoudigt.

(d) De periode wordt acht keer groter.

Uitwerking: De eigenfrequentie van een veer wordt bepaald door $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Als je de massa vier keer groter maakt halveert dus de frequentie. Omdat $T = \frac{1}{f}$ zal dus de periode verdubbelen.

Oefening 18.6.9. Een bol met een massa van 150 g wordt opgehangen aan een dun touw met een lengte van 1,25 m. Je geeft een duw tegen de bol waardoor die heen en weer slingert met een maximale uitwijkingshoek van 0,25 rad. We verwaarlozen de wrijving. Hoe groot is de frequentie van deze slingerbeweging?

$$f = 0.446\ \text{Hz}$$

Uitwerking: De eigenfrequentie van een eenvoudige wiskundige slinger wordt bepaald door

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Bijgevolg is

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9,81\frac{\text{N}}{\text{kg}}}{1,25\ \text{m}}} = 0,446\ \text{Hz}$$

De frequentie van de slingerbeweging is 0,446 Hz.

Oefening 18.6.10. Een slinger met massa m en lengte ℓ beweegt heen en weer met een periode T. Als je de slinger vier keer korter maakt en de massa dubbel zo zwaar, wat kan je dan zeggen over de periode van de aangepaste slinger?

Meerkeuze:

CC BY-NC-SA 4.0

18.6 Herhalingsoefeningen: trillingen

(a) De periode is $\frac{T}{2}$. ✓

(b) De periode is $2T$.

(c) De periode is $4T$.

(d) De periode blijft gelijk.

Uitwerking: De eigenfrequentie van een enkelvoudige wiskundige slinger wordt bepaald door $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$. Als je de lengte vier keer korter maakt, verdubbelt de frequentie:

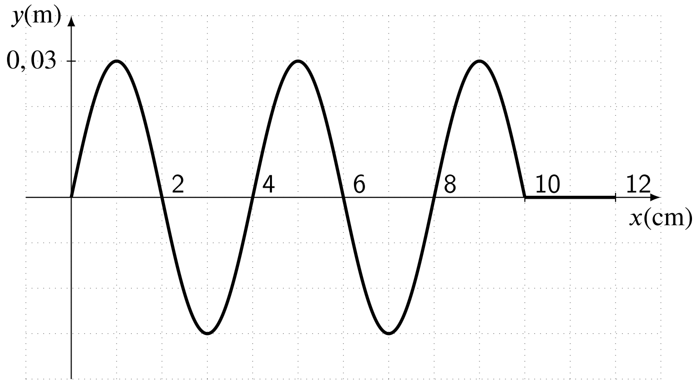
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\frac{\ell}{4}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4g}{\ell}} = 2 \cdot \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Omdat $T = \frac{1}{f}$ zal de periode halveren. De periode van de aangepaste slinger is dus $\frac{T}{2}$.

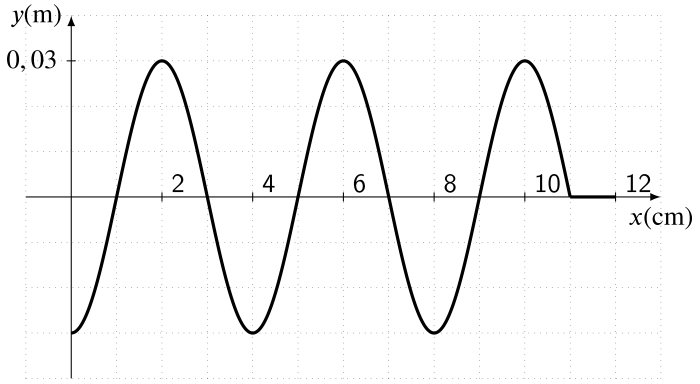
CC BY-NC-SA 4.0

18.7 Herhalingsoefeningen: golven

Oefening 18.7.1. De figuren geven een momentopname van een golf y(x,t) weer op twee verschillende tijdstippen. De eerste grafiek geeft een momentopname op $t = 5,0$ s en de tweede grafiek geeft een momentopname op $t = 5,5$ s



Tijdstip $t = 5,0$ s



Tijdstip $t = 5,5$ s

Meerkeuze:

(a) $y(x,t) = 0,01\ sin(2\pi(\frac{t}{0,5} - \frac{x}{4}))$

(b) $y(x,t) = 0,03\ sin(2\pi(\frac{t}{2} - \frac{x}{4}))$

(c) $y(x,t) = 0,01\ sin(2\pi(\frac{t}{2} - \frac{x}{0,04}))$

(d) $y(x,t) = 0,03\ sin(2\pi(\frac{t}{2} - \frac{x}{0,04}))$ ✓

Uitwerking: Door de twee figuren te vergelijken zien we dat de golf een rechtslopende golf is. De algemene vergelijking van een rechtslopende golf wordt gegeven door

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) \\ &= A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right) \\ &= A \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \end{aligned}$$

Op de figuren zien we dat de amplitude $A = 0,03$ m en dat de golflengte $\lambda = 4$ cm $= 0,04$ m.

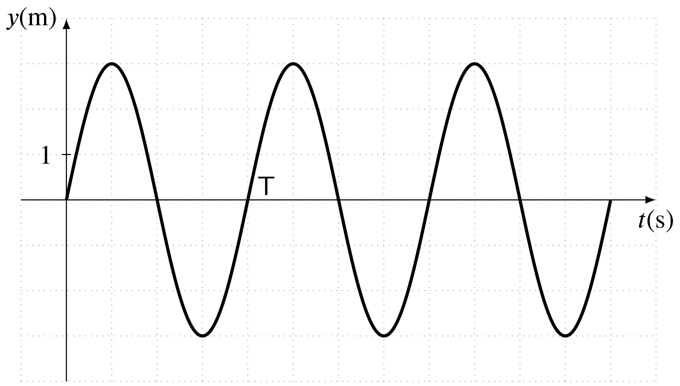
CC BY-NC-SA 4.0

18.7 Herhalingsoefeningen: golven

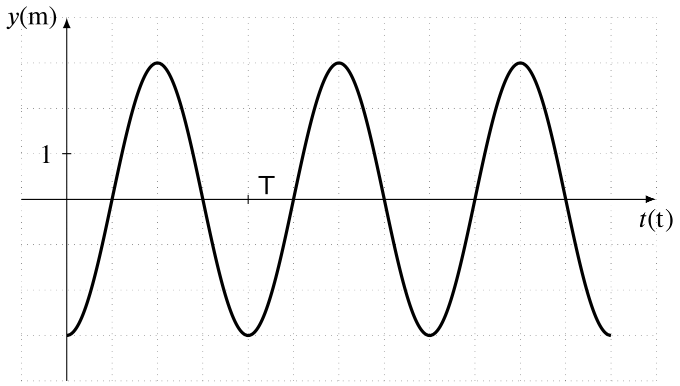
We zien dat in 0,5 s de golf één vierde golflengte is opgeschoven. Omdat de golf in één periode een volledige golflengte aflegt, betekent dit dat de periode gelijk is aan $T = 4 \cdot 0,5\ s = 2\ s$. We vullen deze waarden in in het algemene voorschrift en vinden dat

$$y(x,t) = 0,03\ sin(2\pi(\frac{t}{2} - \frac{x}{0,04}))$$

Oefening 18.7.2. De figuren geven de grafiek van de trilling weer van twee verschillende punten P en Q. Deze punten bevinden zich op een touw waarop een naar rechts lopende golf zich voortplant.



Punt P



Punt Q

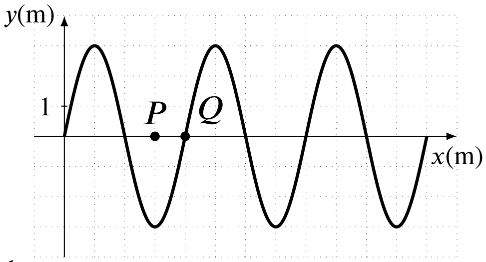
Welke grafiek geeft een juiste voorstelling van de golfvergelijking y(x,t) op tijdstip $t = \frac{3T}{4}$?

Meerkeuze:

CC BY-NC-SA 4.0

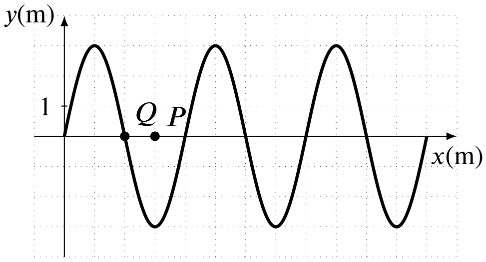
18.7 Herhalingsoefeningen: golven

(a)

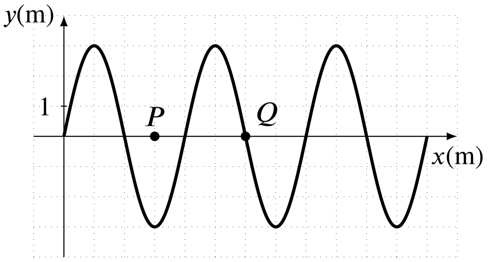


✓

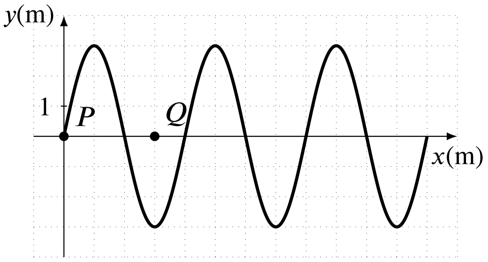
(b)



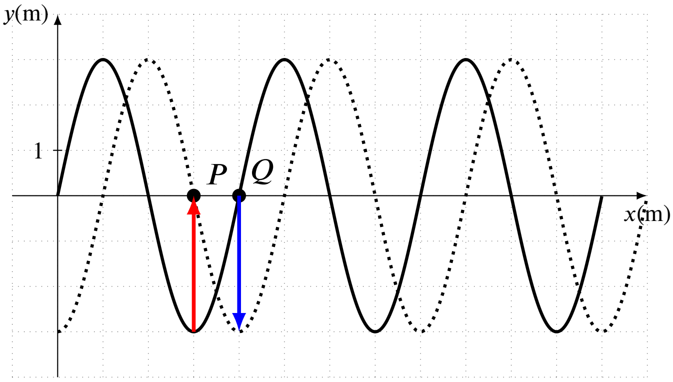
(c)



(d)



Uitwerking: Op tijdstip $t = \frac{3T}{4}$ is $y_P = -3$ m en $y_Q = 0$ m. Op tijdstip $t = T$ is $y_P = 0$ m en $y_Q = -3$ m. De figuur toont de rechtstlopende golf op twee verschillende tijdstippen $t = \frac{3T}{4}$ en $t = T$ waarvan de uitwijking van het punt P evolueert van -3 m naar 0 m en die van punt Q van O naar -3 m.:



Dus grafiek A is correct.

CC BY-NC-SA 4.0

18.8 Herhalingsoefeningen: Usolvit

18.8.1 Usolv-it oefeningen

Klik om een losse oefenreeks samen te stellen met meerkeuzevragen van het Usolv-it oefeningenplatform. Je kan per thema aangeven hoeveel oefeningen je wenst toe te voegen aan de losse oefeningenreeks. Druk onderaan de Usolv-it pagina op START om met de oefeningenreeks te beginnen.

CC BY-NC-SA 4.0

19.1 Bibliografie

- Pearson International Edition, *Physics Technology Update*, James S. Walker.
- Pearson International Edition, *Physics for scientists and engineers with Modern Physics*, Douglas Giancoli.
- Pearson Global Edition, *Physics for Scientists and Engineers: A strategic approach with modern physics*, Randall D. Knight.
- Jos Rogiers, *Van fysica naar biofysica, cursustekst KU Leuven*, 2010.
- Roger Silverans, *Algemene natuurkunde, cursustekst KU Leuven*, 2007.
- Enkele handboeken fysica voor het secundair onderwijs 2de en 3de graad 2u fysica :
  - Interactie, Die Keure
  - Focus Fysica, Pelckmans
  - Quark, Van Inn
  - Fysica Vandaag, Pelckmans
  - . . .

CC BY-NC-SA 4.0